

03 Aleatoriedade e o Qui-quadrado

Versão: 1,1

José Pedro do Amaral

16 de dezembro de 2025

Deus não joga aos dados.

Albert Einstein

0. Determinismo e estocasticidade.

- a.) **Determinismo:** dado um conjunto de condições iniciais e regras do sistema, o resultado é sempre o mesmo (ex.: equação cartesiana de uma recta). Se se correr o modelo dez vezes, obtém-se o mesmo resultado dez vezes. A variabilidade observada vem apenas de diferenças nas entradas ou nos parâmetros, pois o mecanismo em si não introduz variabilidade. Modelos deterministas são adequados quando o sistema é previsível e os dados são estáveis; oferecem reprodutibilidade total mas não capturam flutuações.
- b.) **Estocasticidade:** o próprio mecanismo inclui elementos aleatórios. Mesmo com as mesmas condições iniciais, execuções repetidas podem produzir resultados diferentes. A variabilidade faz parte do modelo, representando incerteza intrínseca (por exemplo, flutuações naturais, ruído, eventos discretos imprevisíveis) ou incerteza que não se pode (ou não se quer) modelar de forma determinística. Modelos estocásticos são preferíveis quando as flutuações e o acaso afectam materialmente os resultados ou quando queres descrever probabilidades de desfechos, não apenas um trajecto «médio». Na prática, muitos problemas combinam ambos: um núcleo determinista (leis, balanços) e componentes estocásticas para representar variação, ruído de medição ou eventos aleatórios.

Em português corrente, «ao acaso» costuma significar «sem plano, sem critério visível, ao calhas», descrevendo assim a intenção (ou falta dela) de quem escolhe. Aleatório, pelo contrário, é um termo técnico: implica que os resultados são regidos por um mecanismo de incerteza explícito (por exemplo, um sorteio bem definido) e, idealmente, com probabilidades conhecidas. Assim, alguém pode escolher nomes ao acaso mas enviesar sem querer (tende a pegar nos de cima da lista); já amostragem aleatória exige um processo reprodutível que assegure imparcialidade (cada elemento com probabilidade conhecida e não nula). Em suma, ao acaso é coloquial e poderá ter ordem introduzida por enviesamento (quase sempre inconscientemente) e aleatório é controlado por um modelo de incerteza como, por exemplo, o resultado do lançamento de um dado não-viciado — e é isto que interessa quando queremos inferir algo a partir da informação experimental.

Contudo, gerar aleatoriamente é difícil. Os computadores não «tiram à sorte» como um dado de jogo o faz, ao invés produzem pseudo-aleatoriedade por algoritmos deterministas

que precisam de uma boa semente (*seed*) e não a tendo poderão introduzir padrões subtis. Se a semente for pobre (tiver pouca entropia), o resultado parece aleatório mas não é fiável. Fontes físicas (ruído térmico, erro de relógio, movimentos do rato, fenómenos quânticos, teclas pressionadas ao acaso) ajudam, mas são limitadas, ruidosas, exigem condicionamento e testes de qualidade. Em ciência e amostragem isto importa, pois escolhas ao acaso poderão enviesar sem que esse enviesamento seja imediatamente aparente. Portanto, ao se dizer que algo é aleatório implica provar que o processo tem probabilidades bem definidas e ausência de tendências, e isto requer geradores, sementes e validação adequados.

1. Objectivo

Verificar, experimentalmente, se um dado de dez faces (numerado de 0 a 9 ou de 1 a 10) pode ser considerado *honesto*, isto é, se todas as faces têm a mesma probabilidade de sair em cada lançamento. Para isso será usado o **teste do qui-quadrado de aderência** com um número total de lançamentos $n = 100$.

2. Fundamento teórico (resumo)

Diz-se que um dado de dez faces é honesto se, em cada lançamento, a probabilidade de cada face sair é

$$p_i = 0,1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 10.$$

Formulam-se as seguintes hipóteses estatísticas:

Hipótese nula (sem efeito):

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_{10} = 0,1$$

Hipótese alternativa (há efeito):

$$H_1 : \exists i \text{ tal que } p_i \neq 0,1$$

Após efectuar $n = 100$ lançamentos, conta-se quantas vezes saiu cada face:

$$O_i = \text{frequência observada da face } i.$$

Se o dado for honesto, espera-se que, em média,

$$E_i = n \times 0,1 = 100 \times 0,1 = 10$$

para cada face i (frequência *esperada*).

O valor da estatística do teste do qui-quadrado é calculado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

Neste teste, o número de graus de liberdade (df) é $k - 1$, em que k é o número de categorias (faces do dado). Assim, $k = 10$ e:

$$df = 10 - 1 = 9.$$

Para um nível de significância de 5% (isto é, $\alpha = 0,05$), o valor crítico da distribuição qui-quadrado com 9 graus de liberdade é aproximadamente

$$\chi^2_{0,95;9} \approx 16,92.$$

Regra de decisão:

Se $\chi^2 \leq 16,92$, não há evidência estatística suficiente, ao nível de significância de 5%, para rejeitar H_0 . Conclui-se que os dados são compatíveis com um dado honesto.

Se $\chi^2 > 16,92$, rejeita-se H_0 . Conclui-se que os dados *não* são compatíveis com um dado honesto (há indícios de que o dado é viciado).

3. Material necessário

1 dado de dez faces para testar;

1 copo de papel;

Tabela de registo de resultados;

Calculadora científica (ou folha de cálculo);

Opcional: tabela de valores críticos da distribuição qui-quadrado (ou aplicação-botão de qui-quadrado na calculadora).

4. Procedimento experimental

1. Verificar o dado de dez faces (integridade física, faces legíveis, etc.).
2. Preparar uma tabela com 10 linhas, uma por cada face, e colunas para:
 - número da face;
 - número de vezes que apareceu (frequência observada O_i);
 - frequência esperada E_i ;
 - termo $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.
3. Lançar o dado **100 vezes**, assegurando condições semelhantes em todos os lançamentos:
 - lançar sobre a mesma superfície;
 - aplicar, de forma aproximada, a mesma força;
 - garantir que o dado roda suficientemente (não o colocar na posição desejada).

4. Após cada lançamento, registrar na tabela a face que saiu, somando 1 à contagem respectiva O_i .
5. No final dos 100 lançamentos, confirmar que

$$\sum_{i=1}^{10} O_i = 100.$$

5. Tratamento de dados

5.1. Organização em tabela

Preencher, para cada face i , a seguinte tabela:

Tabela 1. Tabela de frequências observadas e esperadas para o dado de dez faces.

Face i	O_i	Freq. relativa	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1			10	
2			10	
3			10	
4			10	
5			10	
6			10	
7			10	
8			10	
9			10	
10			10	
Total	100	1	100	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

A frequência relativa de cada face é dada por

$$\text{freq. relativa de } i = \frac{O_i}{100}.$$

5.2. Cálculo da estatística do teste

1. Para cada face i , calcular primeiro a diferença $O_i - E_i$.
2. Elevar essa diferença ao quadrado: $(O_i - E_i)^2$.
3. Dividir por $E_i = 10$:

$$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

4. Somar os 10 valores obtidos:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

6. Decisão e conclusão

1. Comparar o valor calculado de χ^2 com o valor crítico $\chi_{0,95;9}^2 \approx 16,92$.

2. Decidir:

Se $\chi^2 \leq 16,92$: não se rejeita H_0 . Há consistência entre os resultados experimentais e a hipótese de que o dado de dez faces é honesto.

Se $\chi^2 > 16,92$: rejeita-se H_0 . Os dados experimentais sugerem que o dado é viciado (pelo menos uma das faces tem probabilidade diferente de 0,1).

3. Redigir uma curta conclusão em linguagem corrente, referindo:

o valor de χ^2 obtido;

a decisão tomada (rejeitar ou não rejeitar H_0);

o que isso significa, em termos de honestidade do dado.

7. Questões para reflexão

1. Se aumentasses o número total de lançamentos para $n = 200$ ou $n = 500$, que vantagens e desvantagens esperarias na aplicação do teste do qui-quadrado?

2. Se, em vez de um dado de dez faces, utilizasses um dado de seis faces com o mesmo procedimento (mas ajustando as frequências esperadas), como mudaria o número de graus de liberdade?

3. Um valor de χ^2 muito pequeno (por exemplo, perto de 0) significa *automaticamente* que o dado é honesto? Comenta.

Critical values of chi-square (right tail)

Degrees of freedom (df)	Significance level (α)							
	.99	.975	.95	.9	.1	.05	.025	.01
1	-----	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892
40	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691
50	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154
60	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379
70	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425
80	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329
100	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116
1000	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807