

Física 12.º ano

03 Cinemática e Dinâmica de uma Partícula em 2D

Versão: 0,1

José Pedro do Amaral

23 de setembro de 2025

1. Enquadramento e objetivos

Nesta nota descrevem-se os conceitos de *posição*, *velocidade* e *aceleração* em duas dimensões, a decomposição da aceleração nas componentes *tangencial* e *normal* (moldura de Frenet), e a aplicação de equações paramétricas ao movimento sob *força resultante constante* (aceleração constante). O foco está tanto na interpretação geométrica (situações reais e simulações) como em estratégias analíticas de resolução de problemas.

2. Simbologia e convenções

Tabela 1: Simbologia e convenções usadas ao longo do texto

Símbolo	Leitura	Significado / Definição	Exemplo
$\mathbf{r}$	vetor r	vetor posição (negrito)	$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$
$\mathbf{v}, \mathbf{a}$	v, a vetoriais	velocidade, aceleração	$\mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{i}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{j}}$
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	versores x, y, z	base cartesiana ortonormal	$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$
$\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}$	tangente, normal	moldura de Frenet (2D)	$\mathbf{a} = \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + v^2 \kappa \hat{\mathbf{n}}$
$\ \mathbf{v}\ $	norma de $\mathbf{v}$	módulo de um vetor	$v = \ \mathbf{v}\ $
$\cdot$	produto escalar	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$v^2 = v_0^2 + 2 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$
$\times$	produto vetorial	(em 2D, fora do plano)	—
$(\dot{}), (\ddot{})$	ponto, dois pontos	derivadas em t	$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$
$\frac{d}{dt}$	derivada total	taxa de variação temporal	$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)$
κ, ρ	curvatura, raio	$\kappa = \frac{1}{\rho}$	$\kappa = \frac{ \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} }{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$
$\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta$	versores polares	base em coordenadas polares	$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$
$\mathbb{R}$	reais	conjunto dos números reais	$t \in \mathbb{R}$

Nota. Vetores aparecem a negrito ($\mathbf{v}$); versores com acento circunflexo ($\hat{\mathbf{t}}$), incluindo $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$. Derivadas temporais usam ponto ($\dot{}$), e normas usam $\|\cdot\|$.

Convenções tipográficas. a.) Vetores em negrito: $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. b.) Versores com acento circunflexo: $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$. c.) Normas com $\|\cdot\|$ e módulos com $|\cdot|$. d.) Derivadas temporais por pontos; derivadas explícitas por $\frac{d}{dt}$. e.) Em polares, $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta$ seguem o ângulo positivo θ .

Para o vetor $\mathbf{v} = (3, 4)$,

Módulo (norma euclidiana): $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

Norma da soma: $\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |4| = 7$,

Norma do máximo: $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$.

3. Cinemática vetorial em 2D

Seja a posição da partícula dada por um vetor função do tempo

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Definem-se:

$$\text{velocidade: } \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(t) \hat{\mathbf{j}}, \quad (2)$$

$$\text{aceleração: } \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{x}(t) \hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}(t) \hat{\mathbf{j}}. \quad (3)$$

A *rapidez* (módulo da velocidade) é

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (4)$$

As *equações paramétricas* do movimento são simplesmente $x(t)$ e $y(t)$. Eliminar t (quando possível) dá a *trajetória* $y = y(x)$.

Energia cinética e trabalho (verificação). É útil a identidade vetorial (derivada do trabalho-energia) para aceleração constante $\mathbf{a}$:

$$v^2(t) = v_0^2 + 2 \mathbf{a} \cdot [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0]. \quad (5)$$

4. Decomposição tangencial-normal (Frenet)

Seja $s(t)$ o comprimento de arco, com $\dot{s} = v$. Define-se o versor *tangente*

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (6)$$

e o versor *normal principal* $\hat{\mathbf{n}}$, ortogonal a $\hat{\mathbf{t}}$, que aponta para o centro de curvatura. A *curvatura* é

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right\| = \frac{1}{\rho}. \quad (7)$$

em que ρ é o raio de curvatura. As **equações de Frenet** no plano são

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}, \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\kappa \hat{\mathbf{t}}. \quad (9)$$

A aceleração decompõe-se elegantemente em

$$a_t = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad (10)$$

$$a_n = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Expressões úteis em termos de $x(t)$ e $y(t)$: *Caso circular*: para movimento circular de raio R com velocidade angular ω ,

$$v = R\omega, \quad a_t = \dot{v} = R\dot{\omega}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (12)$$

5. Coordenadas polares no plano

Com $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ortogonal a $\hat{\mathbf{e}}_r$ no sentido crescente de θ :

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (13)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (14)$$

Assim, $a_n = r\dot{\theta}^2$ quando a curvatura é puramente centrípeta (por exemplo, em movimento circular $r = R = \text{const}$).

6. Dinâmica: força resultante constante

Pela Segunda Lei de Newton

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = m \mathbf{a}. \quad (15)$$

Se $\mathbf{F}_{\text{res}}$ é constante (em módulo e direção), então $\mathbf{a}$ é constante:

$$\mathbf{a} = (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}) = \text{const}. \quad (16)$$

As *equações paramétricas* (com condições iniciais $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$) são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t, \quad (17)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2. \quad (18)$$

Por componentes:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad (19)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2. \quad (20)$$

Eliminando t (quando $a_x \neq 0$) obtém-se, por exemplo,

$$y(x) = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) + \frac{a_y - a_x \tan \theta_0}{2 v_{0x}^2} (x - x_0)^2, \quad (21)$$

com $\tan \theta_0 = v_{0y}/v_{0x}$.

Projétil num campo gravítico uniforme. Para $\mathbf{a} = (0, -g)$ (sem resistência do ar):

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t, \quad (22)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (23)$$

$$y(x) = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2, \quad (24)$$

altura máxima (a partir de y_0): $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$, tempo ao ápice $t_{\text{ápice}} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$, e alcance (se y final = y_0):

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0). \quad (25)$$

Direção da força diferente da de $\mathbf{v}_0$. É a situação genérica de (18)–(21): a trajetória é *parabólica*, com concavidade dada pelo sinal do componente de aceleração perpendicular a $\mathbf{v}_0$.

7. Estratégias de resolução e raciocínios demonstrativos

1. **Escolhe o referencial** e o sistema de eixos de forma a simplificar (x ao longo de uma direção privilegiada, p. ex. direção sem aceleração).
2. **Decompõe $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}$:** (v_{0x}, v_{0y}) , (a_x, a_y) .
3. **Integra** (ou aplica diretamente) (17) e (18), usando as condições iniciais.
4. **Elimina o parâmetro** para obter $y(x)$ quando útil (21).
5. **Interpreta geometricamente:** $a_t = \dot{v}$ controla o alongamento/encurtamento de v ; $a_n = v^2/\rho$ curva a trajetória (raio de curvatura).
6. **Verifica** com (5) (dimensões e limites: $g \rightarrow 0$, $\theta_0 \rightarrow 0$, etc.).

8. Ligação a simulações

Para simular num passo temporal Δt (esquema de Euler explícito):

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{a} \Delta t, \quad (26)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \mathbf{v}_k \Delta t. \quad (27)$$

Com $\mathbf{a}$ constante, o esquema reproduz (18) à medida que $\Delta t \rightarrow 0$. Para visualizar a_t e a_n , calcula-se $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ e projeta-se $\mathbf{a}$ em $\hat{\mathbf{t}}$ e no normal.

9. Resumo de fórmulas úteis (2D)

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{v} = \dot{x} \hat{\mathbf{i}} + \dot{y} \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{i}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{j}},$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{v}/v, \quad \kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + v^2 \kappa \hat{\mathbf{n}}}, \quad a_t = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad a_n = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$(\text{Polares}) \quad \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

$$(\text{Acel. const.}) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

$$(\text{Projétil}) \quad x = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t,$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$y(x) = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2.$$

10. Armadilhas e notas finais

“Força constante” implica *vetorialmente* constante; atrito cinético dependente do sentido de $\mathbf{v}$ raramente cumpre isto.

$a_t = \dot{v}$ pode ser nulo mesmo com aceleração não nula: se v é constante, a curvatura (e a_n) absorve toda a aceleração.

Sempre que possível, usa (5) para verificar contas sem tempo explícito.