

Física 12.º ano

01 Problemas — cinemática da partícula (versão com respostas)

Versão: 0,1

José Pedro do Amaral

8 de outubro de 2025

Tabela 1: Exemplos de derivadas aplicáveis aos problemas da disciplina.

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Condições-Observações
c	0	c constante
nx	n	
x^n	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$ x $	$\frac{x}{ x }$	$x \neq 0$; não derivável em $x = 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$

Nota: conforme mencionado na aula, as derivadas permitem-nos calcular outras grandezas sabendo qual é o modelo matemático do movimento.

Tabela 2: Ordens de derivação aplicáveis ao modelo da Fig. 1 e seus nomes.

Ordem	Nome / Símbolo	Expressão
0	Posição $x(t)$	$4t^3$
1	Velocidade $v(t) = \dot{x}$	$12t^2$
2	Aceleração $a(t) = \ddot{x}$	$24t$
3	Arroco $j(t) = \dddot{x}$	24
4	Solicitação $s(t) = x^{(4)}$	0
5	Crepação $c(t) = x^{(5)}$	0
6	Estalido $p(t) = x^{(6)}$	0

Nota: até ao arroco, inclusivé, estas ordens de derivação têm um interesse prático. Contudo, o interesse das outras acima é quase exclusivamente computacional. Por exemplo, o arroco tem relevância nos cálculos de conforto e durabilidade do equipamento.

Problema 1 — Força constante em MRUA¹

Um corpo de massa $m = 0,15 \text{ kg}$ sofre uma força horizontal constante $F = -9,0 \text{ N}$. Parte do repouso em $x_0 = 75 \text{ m}$. Sem atrito.

Pede-se:

- a) Calcula a aceleração usando $a = \frac{F}{m}$.
- b) Escreve $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ com $v_0 = 0$.
- c) Determina o instante em que $x(t) = 0$.

a) Aceleração.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-9,0}{0,15} = -60 \text{ m/s}^2.$$

b) Equação horária.

$$x(t) = 75 + \frac{1}{2}(-60)t^2 = 75 - 30t^2.$$

c) Instante do cruzamento $x = 0$.

$$0 = 75 - 30t^2 \Rightarrow 30t^2 = 75 \Rightarrow t^2 = 2,5 \Rightarrow t = \sqrt{2,5} \text{ s} \approx 1,581 \text{ s}.$$

¹Movimento retilíneo uniformemente acelerado.

Problema 2 — Queda livre sem atrito (força imediatamente antes do impacto)

Um corpo de massa $m = 0,28 \text{ kg}$ cai a partir de $y = 135 \text{ m}$, sem atrito do ar.

Pede-se:

- a) Indica quais as forças que actuam durante a queda.
- b) Calcula o módulo da força imediatamente antes do impacto.

a) Forças.

Sem atrito do ar, actua apenas o peso: $\vec{F} = m\vec{g}$ (vertical, para baixo).

b) Módulo imediatamente antes do impacto.

$|\vec{F}| = mg = 0,28 \times 9,81 = \boxed{2,7468 \text{ N}}$ (com y positivo para cima: $F_y \approx -2,747 \text{ N}$).

Problema 3 — Travar numa curva (comparar acelerações)

Um carro entra numa curva com rapidez $v_1 = 90 \text{ km/h}$ e sai com $v_2 = 45 \text{ km/h}$. O raio da curva é constante $R = 15 \text{ m}$.

Pede-se:

- a) Converte v_1 e v_2 para m/s.
- b) Calcula a aceleração normal $a_n = \frac{v^2}{R}$ no início e no fim.
- c) Compara a_{n2} com a_{n1} (razão a_{n2}/a_{n1}).

Sugestão: não é preciso o valor de R para a razão.

a) Conversões.

$$v_1 = 90 \text{ km/h} = 25,0 \text{ m/s}, \quad v_2 = 45 \text{ km/h} = 12,5 \text{ m/s}.$$

b) Acelerações normais.

$$a_{n1} = \frac{25^2}{15} = \frac{625}{15} \approx 41,667 \text{ m/s}^2, \quad a_{n2} = \frac{12,5^2}{15} = \frac{156,25}{15} \approx 10,417 \text{ m/s}^2.$$

c) Razão.

$$\frac{a_{n2}}{a_{n1}} = \left(\frac{12,5}{25} \right)^2 = \boxed{0,25}.$$

Problema 4 — Movimento no plano com $x(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ e $y(t) = 3t$

Considera as funções (SI²): $x(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ e $y(t) = 3t$.

Pede-se:

- Determina $r(1)$ e $r(3)$ e o deslocamento $\Delta r = r(3) - r(1)$.
- Calcula a velocidade instantânea $\vec{v}(t) = (\dot{x}, \dot{y})$ usando as regras de derivação do quadro e a rapidez $|\vec{v}|$ em $t = 3$ s.
- Calcula a aceleração $\vec{a}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y})$. Diz se, em $t = 3$ s, a partícula está a acelerar ou a travar ($\vec{a}$ faz ou não ângulo agudo com $\vec{v}$?).

Fórmulas úteis: $\dot{x} = 4 - t$, $\dot{y} = 3$; $\ddot{x} = -1$, $\ddot{y} = 0$.

a) Posições e deslocamento.

$$r(1) = (3,5, 3), \quad r(3) = (7,5, 9) \Rightarrow \Delta r = (4, 6).$$

b) Velocidade e rapidez em $t = 3$.

$$\vec{v}(t) = (4 - t, 3) \Rightarrow \vec{v}(3) = (1, 3), \quad |\vec{v}(3)| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{10} \approx 3,162 \text{ m/s}}.$$

c) Aceleração e sentido.

$$\vec{a}(t) = (-1, 0). \text{ Em } t = 3: \vec{a} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -1 < 0, \text{ logo } \textit{trava} \text{ (rapidez a diminuir).}$$

²*Système international d'unités*

Problema 5 — Curva circular a rapidez constante

Um automóvel descreve um arco de círculo de raio $R = 100\text{ m}$ com rapidez $v = 20\text{ m/s}$ ($\approx 72\text{ km/h}$).

Pede-se:

a) Calcula a aceleração normal $a_n = \frac{v^2}{R}$.

b) Se a massa é $m = 1,0\text{ t}$, calcula a força lateral $F_n = m a_n$.

c) Determina o coeficiente de atrito mínimo $\mu_{\min} = \frac{a_n}{g}$ para não derrapar.

a) $a_n = \frac{20^2}{100} = 4\text{ m/s}^2 \approx 0,408\text{ g}$.

b) $F_n = 1000 \times 4 = \boxed{4,000\text{ N}} = 4\text{ kN}$.

c) $\mu_{\min} = \frac{4}{9,81} \approx \boxed{0,408}$.

Problema 6 — Forças tangencial e normal que variam no tempo

Uma partícula de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ move-se numa trajetória curva. A força tangencial é $F_t(t) = 6 - 2t \text{ (N)}$ e a normal é constante $F_n = 20 \text{ (N)}$. Em $t = 0$, a rapidez é $v_0 = 0$.

Pede-se:

- a) Calcula $a_t(t) = F_t/m$ e $a_n = F_n/m$.
- b) Usa $\frac{dv}{dt} = a_t(t)$ para obter $v(t)$. Indica quando o movimento acelera ($a_t > 0$) e quando trava ($a_t < 0$). Em que instante $v(t)$ volta a zero?
- c) Escreve o raio de curvatura $R(t) = \frac{v(t)^2}{a_n}$ e calcula $R(2 \text{ s})$.
- a) $a_t(t) = \frac{6 - 2t}{2} = 3 - t$, $a_n = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}^2$.
- b) $\frac{dv}{dt} = 3 - t \Rightarrow v(t) = 3t - \frac{1}{2}t^2$ (e $v(0) = 0$).
Acelera se $t < 3 \text{ s}$; trava se $t > 3 \text{ s}$. Volta a zero quando $t = 0$ ou $t = 6 \text{ s}$.
- c) $R(t) = \frac{(3t - \frac{1}{2}t^2)^2}{10}$. Em $t = 2$: $v = 4 \Rightarrow R(2) = 1,6 \text{ m}$.

Problema 7 — Tangente, deslocamento e rapidez média com $x(t) = 4t^3$

Considera $x(t) = 4t^3$ e que $t_0 = 6$ s.

Pede-se:

- a) Encontra o instante em que a rapidez $v(t) = \dot{x}$ atinge 432 m/s.
- b) Escreve a recta tangente³a $x(t)$ no ponto t_0 : $x_{\text{tan}}(t) = v(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$.
- c) Calcula o deslocamento, a distância percorrida e a rapidez média no intervalo $[0, 6]$ s.

Pista: usa $\dot{x} = 12t^2$.

a) $12t^2 = 432 \Rightarrow t^2 = 36 \Rightarrow \boxed{t = 6 \text{ s}}.$

b) $x(6) = 4 \cdot 6^3 = 864$, $v(6) = 432 \Rightarrow \boxed{x_{\text{tan}}(t) = 432(t - 6) + 864}.$

c) $\Delta x = 864 - 0 = 864$ m (função crescente $\Rightarrow$ distância = 864 m).

$$v_{\text{méd}} = \frac{864}{6} = \boxed{144 \text{ m/s}}.$$

³Conforme mencionei nas aulas, esta é a fórmula geral para a tangente de $f(x)$ no ponto $x = a$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. A primeira derivada é o declive da reta.

Problema 8 — Aceleração instantânea e média; força e potência

Para $x(t) = 4t^3$ tens $v(t) = 12t^2$ e $a(t) = 24t$.

Pede-se:

- a) Calcula a aceleração *instantânea* em $t = 6$ s e a *média* no intervalo $[5, 7]$ s usando

$$a_{\text{méd}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

- b) Para $m = 2,2$ kg, obtém $F(t) = m a(t)$ e $\dot{F}(t)$. Avalia em $t = 6$ s.

- c) Calcula a potência $P(t) = F(t) v(t)$ em $t = 6$ s.

a) $a(6) = 24 \cdot 6 = \boxed{144 \text{ m/s}^2}$.

$$a_{\text{méd}} = \frac{v(7) - v(5)}{7 - 5} = \frac{12 \cdot 49 - 12 \cdot 25}{2} = \frac{588 - 300}{2} = \boxed{144 \text{ m/s}^2}.$$

b) $F(t) = ma(t) = 2,2 \cdot 24t = 52,8 t \text{ N}$, $\dot{F}(t) = \frac{dF}{dt} = 52,8 \text{ N/s}$.

$$F(6) = 52,8 \cdot 6 = \boxed{316,8 \text{ N}}.$$

c) $v(6) = 432 \Rightarrow P(6) = 316,8 \times 432 = \boxed{1,36858 \times 10^5 \text{ W} \approx 136,9 \text{ kW}}$.

Problema 9 — Eliminar o tempo: $v(x)$ e $a(x)$

Com $x(t) = 4t^3$.

Pede-se:

- a) Isola t em função de x : $t = t(x)$.
- b) Escreve $v(x)$ substituindo t por $t(x)$ na expressão $v(t) = 12t^2$.
- c) Faz o mesmo para $a(x)$ a partir de $a(t) = 24t$.
- d) Avalia $v(x)$ e $a(x)$ em $x = 864$ m.

Pista: $t = \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}$.

a) $t(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}$.

b) $v(x) = 12\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} = \frac{12}{4^{2/3}} x^{2/3}$.

c) $a(x) = 24\left(\frac{x}{4}\right)^{1/3} = \frac{24}{4^{1/3}} x^{1/3}$.

d) Em $x = 864$: $t = (864/4)^{1/3} = 6 \Rightarrow \boxed{v = 432 \text{ m/s}}, \boxed{a = 144 \text{ m/s}^2}$.

Problema 10 — Do arroco à aceleração e à rapidez (mais difícil⁴)

O *arroco* (jerk) é $j(t) = \frac{da}{dt} = 4 - t$ (SI). Condições iniciais: $a(0) = 0,3 \text{ m/s}^2$ e $v(0) = 0 \text{ m/s}$.

Pede-se:

- a) Obtém $a(t)$ a partir de $j(t)$.
- b) Obtém $v(t)$ sabendo que $\frac{dv}{dt} = a(t)$.
- c) Calcula $a(2\text{s})$ e $v(2\text{s})$.

Sugestão: para polinómios, podes inverter a regra $x^n \mapsto nx^{n-1}$ (ex.: a anti-derivada de 4 é $4t$, de $-t$ é $-\frac{1}{2}t^2$, etc.) e usar as condições iniciais.

a) Aceleração.

$$a(t) = a(0) + \int_0^t (4 - \tau) d\tau = 0,3 + 4t - \frac{1}{2}t^2.$$

b) Rapidez.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau) d\tau = \int_0^t (0,3 + 4\tau - \frac{1}{2}\tau^2) d\tau = 0,3t + 2t^2 - \frac{1}{6}t^3.$$

c) Valores em $t = 2\text{s}$.

$$a(2) = 0,3 + 8 - 2 = \boxed{6,3 \text{ m/s}^2}, \quad v(2) = 0,6 + 8 - \frac{8}{6} = \boxed{7,267 \text{ m/s}} \text{ (aprox.)}.$$

⁴Este problema foi levantado na aula com a questão do «inverso» da derivada — a anti-derivada — e permite-me usar a palavra arroco mais umas vezes.

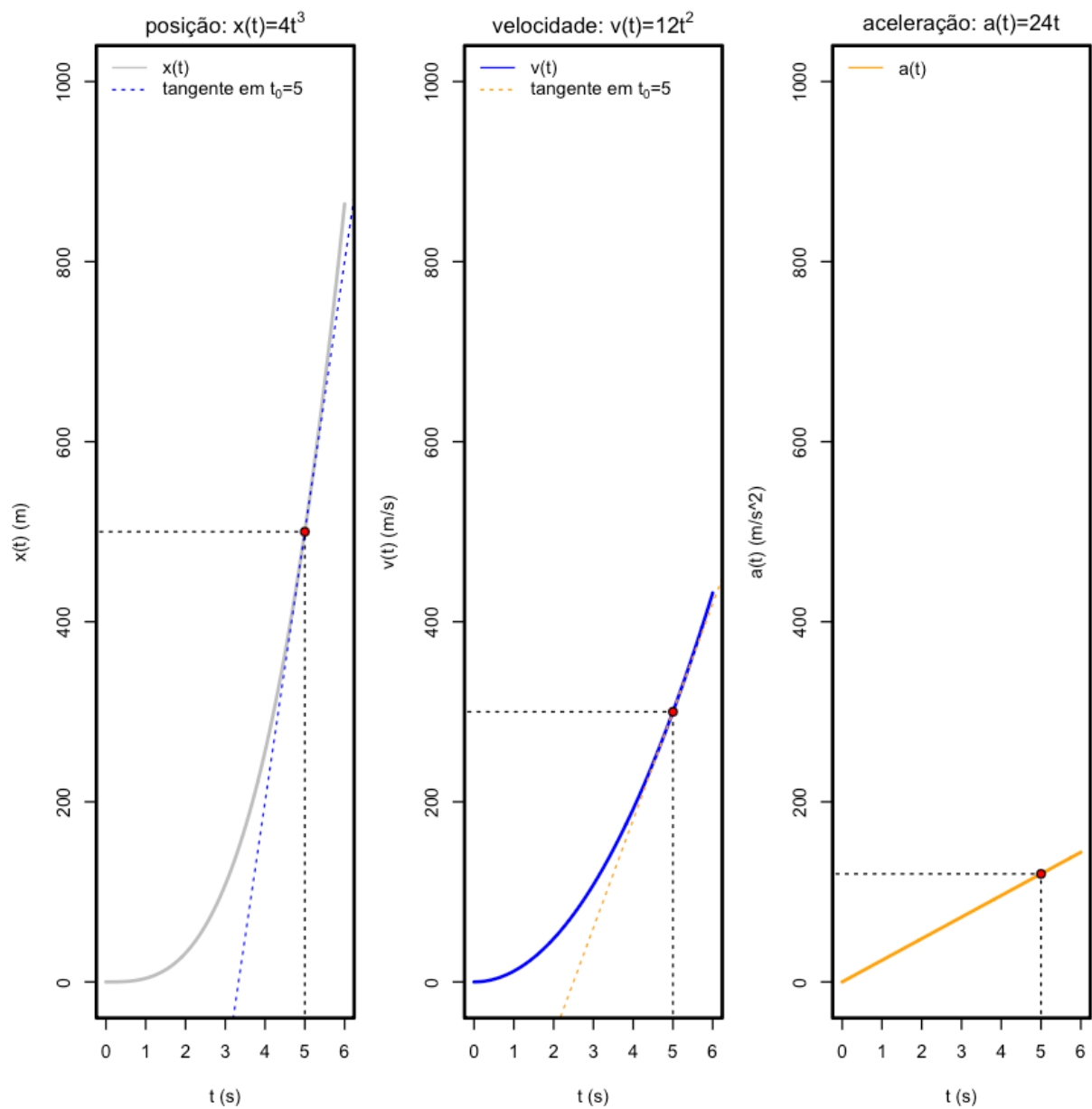


Figura 1: Exemplos gráficos de representação do mesmo movimento ($x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ da esquerda para a direita). A posição da abscissa $t = 5$ s e a sua ordenada correspondente está marcada em todos os gráficos.