

Física 12.º ano

01 Problemas — cinemática da partícula

(versão sem respostas)

Versão: 0,1

José Pedro do Amaral

30 de setembro de 2025

Tabela 1: Exemplos de derivadas aplicáveis aos problemas da disciplina.

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Condições-Observações
c	0	c constante
nx	n	
x^n	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$ x $	$\frac{x}{ x }$	$x \neq 0$; não derivável em $x = 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$

Nota: conforme mencionado na aula, as derivadas permitem-nos calcular outras grandezas sabendo qual é o modelo matemático do movimento.

Tabela 2: Ordens de derivação aplicáveis ao modelo da Fig. 1 e seus nomes.

Ordem	Nome / Símbolo	Expressão
0	Posição $x(t)$	$4t^3$
1	Velocidade $v(t) = \dot{x}$	$12t^2$
2	Aceleração $a(t) = \ddot{x}$	$24t$
3	Arroco $j(t) = \dddot{x}$	24
4	Solicitação $s(t) = x^{(4)}$	0
5	Crepação $c(t) = x^{(5)}$	0
6	Estalido $p(t) = x^{(6)}$	0

Nota: até ao arroco, inclusivé, estas ordens de derivação têm um interesse prático. Contudo, o interesse das outras acima é quase exclusivamente computacional. Por exemplo, o arroco tem relevância nos cálculos de conforto e durabilidade do equipamento.

Problema 1 — Força constante em MRUA¹

Um corpo de massa $m = 0,15 \text{ kg}$ sofre uma força horizontal constante $F = -9,0 \text{ N}$. Parte do repouso em $x_0 = 75 \text{ m}$. Sem atrito.

Pede-se:

- a) Calcula a aceleração usando $a = \frac{F}{m}$.
- b) Escreve $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ com $v_0 = 0$.
- c) Determina o instante em que $x(t) = 0$.

Espaço para resposta:

¹Movimento retilíneo uniformemente acelerado.

Problema 2 — Queda livre sem atrito (força imediatamente antes do impacto)

Um corpo de massa $m = 0,28 \text{ kg}$ cai a partir de $y = 135 \text{ m}$, sem atrito do ar.

Pede-se:

- a) Indica quais as forças que actuam durante a queda.
- b) Calcula o módulo da força imediatamente antes do impacto.

Espaço para resposta:

Problema 3 — Travar numa curva (comparar acelerações)

Um carro entra numa curva com rapidez $v_1 = 90 \text{ km/h}$ e sai com $v_2 = 45 \text{ km/h}$. O raio da curva é constante $R = 15 \text{ m}$.

Pede-se:

- a) Converte v_1 e v_2 para m/s.
- b) Calcula a aceleração normal $a_n = \frac{v^2}{R}$ no início e no fim.
- c) Compara a_{n2} com a_{n1} (razão a_{n2}/a_{n1}).

Sugestão: não é preciso o valor de R para a razão.

Espaço para resposta:

Problema 4 — Movimento no plano com $x(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ e $y(t) = 3t$

Considera as funções (SI²): $x(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ e $y(t) = 3t$.

Pede-se:

- a) Determina $r(1)$ e $r(3)$ e o deslocamento $\Delta r = r(3) - r(1)$.
- b) Calcula a velocidade instantânea $\vec{v}(t) = (\dot{x}, \dot{y})$ usando as regras de derivação do quadro e a rapidez $|\vec{v}|$ em $t = 3$ s.
- c) Calcula a aceleração $\vec{a}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y})$. Diz se, em $t = 3$ s, a partícula está a acelerar ou a travar ($\vec{a}$ faz ou não ângulo agudo com $\vec{v}$?).

Fórmulas úteis: $\dot{x} = 4 - t$, $\dot{y} = 3$; $\ddot{x} = -1$, $\ddot{y} = 0$.

Espaço para resposta:

²*Système international d'unités*

Problema 5 — Curva circular a rapidez constante

Um automóvel descreve um arco de círculo de raio $R = 100\text{ m}$ com rapidez $v = 20\text{ m/s}$ ($\approx 72\text{ km/h}$).

Pede-se:

- a) Calcula a aceleração normal $a_n = \frac{v^2}{R}$.
- b) Se a massa é $m = 1,0\text{ t}$, calcula a força lateral $F_n = m a_n$.
- c) Determina o coeficiente de atrito mínimo $\mu_{\min} = \frac{a_n}{g}$ para não derrapar.

Espaço para resposta:

Problema 6 — Forças tangencial e normal que variam no tempo

Uma partícula de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ move-se numa trajetória curva. A força tangencial é $F_t(t) = 6 - 2t$ (N) e a normal é constante $F_n = 20$ (N). Em $t = 0$, a rapidez é $v_0 = 0$.

Pede-se:

- a) Calcula $a_t(t) = F_t/m$ e $a_n = F_n/m$.
- b) Usa $\frac{dv}{dt} = a_t(t)$ para obter $v(t)$. Indica quando o movimento acelera ($a_t > 0$) e quando trava ($a_t < 0$). Em que instante $v(t)$ volta a zero?
- c) Escreve o raio de curvatura $R(t) = \frac{v(t)^2}{a_n}$ e calcula $R(2 \text{ s})$.

Espaço para resposta:

Problema 7 — Tangente, deslocamento e rapidez média com $x(t) = 4t^3$

Considera $x(t) = 4t^3$ e que $t_0 = 6$ s.

Pede-se:

- a) Encontra o instante em que a rapidez $v(t) = \dot{x}$ atinge 432 m/s.
- b) Escreve a recta tangente³a $x(t)$ no ponto t_0 : $x_{\text{tan}}(t) = v(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$.
- c) Calcula o deslocamento, a distância percorrida e a rapidez média no intervalo $[0, 6]$ s.

Pista: usa $\dot{x} = 12t^2$.

Espaço para resposta:

³Conforme mencionei nas aulas, esta é a fórmula geral para a tangente de $f(x)$ no ponto $x = a$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. A primeira derivada é o declive da reta.

Problema 8 — Aceleração instantânea e média; força e potência

Para $x(t) = 4t^3$ tens $v(t) = 12t^2$ e $a(t) = 24t$.

Pede-se:

- a) Calcula a aceleração *instantânea* em $t = 6$ s e a *média* no intervalo $[5, 7]$ s usando
$$a_{\text{méd}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$
- b) Para $m = 2,2$ kg, obtém $F(t) = m a(t)$ e $\dot{F}(t)$. Avalia em $t = 6$ s.
- c) Calcula a potência $P(t) = F(t) v(t)$ em $t = 6$ s.

Espaço para resposta:

Problema 9 — Eliminar o tempo: $v(x)$ e $a(x)$

Com $x(t) = 4t^3$.

Pede-se:

- a) Isola t em função de x : $t = t(x)$.
- b) Escreve $v(x)$ substituindo t por $t(x)$ na expressão $v(t) = 12t^2$.
- c) Faz o mesmo para $a(x)$ a partir de $a(t) = 24t$.
- d) Avalia $v(x)$ e $a(x)$ em $x = 864$ m.

Pista: $t = \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}$.

Espaço para resposta:

Problema 10 — Do arroco à aceleração e à rapidez (mais difícil⁴)

O *arroco* (jerk) é $j(t) = \frac{da}{dt} = 4 - t$ (SI). Condições iniciais: $a(0) = 0,3 \text{ m/s}^2$ e $v(0) = 0 \text{ m/s}$.

Pede-se:

- a) Obtém $a(t)$ a partir de $j(t)$.
- b) Obtém $v(t)$ sabendo que $\frac{dv}{dt} = a(t)$.
- c) Calcula $a(2\text{s})$ e $v(2\text{s})$.

Sugestão: para polinómios, podes inverter a regra $x^n \mapsto nx^{n-1}$ (ex.: a anti-derivada de 4 é $4t$, de $-t$ é $-\frac{1}{2}t^2$, etc.) e usar as condições iniciais.

Espaço para resposta:

⁴Este problema foi levantado na aula com a questão do «inverso» da derivada — a anti-derivada — e permite-me usar a palavra arroco mais umas vezes.

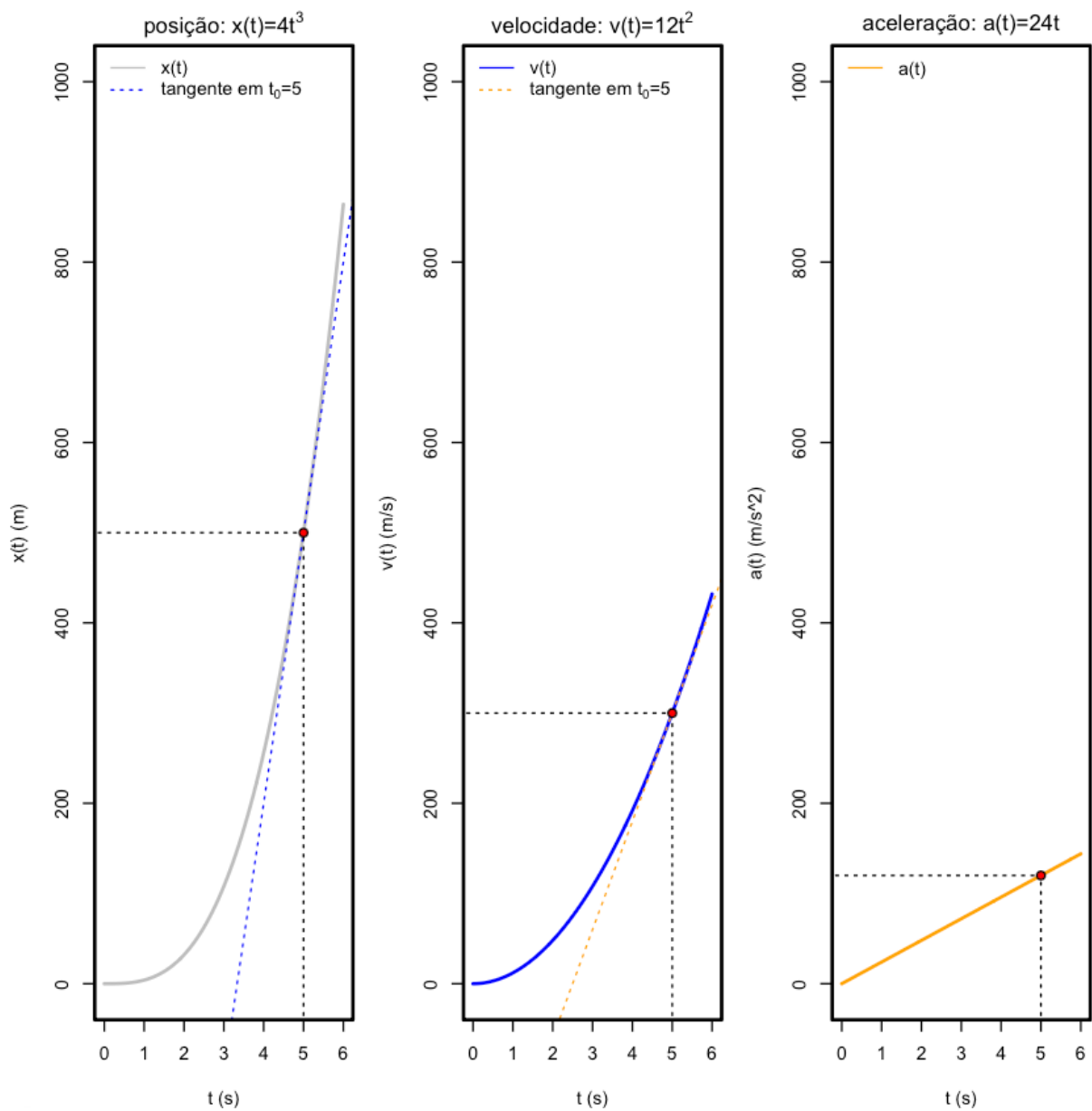


Figura 1: Exemplos gráficos de representação do mesmo movimento ($x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ da esquerda para a direita). A posição da abscissa $t = 5$ s e a sua ordenada correspondente está marcada em todos os gráficos.