

Física 12.º ano

01 Problemas — cinemática da partícula

Versão: 1,1

José Pedro do Amaral

12 de outubro de 2025

Tabela 1: Ordens de derivação aplicáveis ao modelo da Fig. 1 e seus nomes.

Ordem	Nome / Símbolo	Expressão
0	Posição $x(t)$	$4t^3$
1	Velocidade $v(t) = \dot{x}$	$12t^2$
2	Aceleração $a(t) = \ddot{x}$	$24t$
3	Arroco $j(t) = \dddot{x}$	24
4	Solicitação $s(t) = x^{(4)}$	0
5	Crepação $c(t) = x^{(5)}$	0
6	Estalido $p(t) = x^{(6)}$	0

Nota: até ao arroco, inclusivé, estas ordens de derivação têm um interesse prático. Contudo, o interesse das outras acima é quase exclusivamente computacional. Por exemplo, o arroco tem relevância nos cálculos de conforto e durabilidade do equipamento.

Tabela 2: Exemplos de derivadas aplicáveis aos problemas da disciplina.

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Condições-Observações
c	0	c constante
nx	n	
x^n	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$ x $	$\frac{x}{ x }$	$x \neq 0$; não derivável em $x = 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$

Nota: conforme mencionado na aula, as derivadas permitem-nos calcular outras grandezas sabendo qual é o modelo matemático do movimento.

Problema 1 — Força constante em MRUA¹

Um corpo de massa $m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}$ sofre uma força horizontal constante $F = -15 \text{ N}$. Parte do repouso em $x_0 = 100 \text{ m}$, o movimento é retilíneo e sem atrito. *Quando cruzará $x = 0 \text{ m}$?*

1) **Aceleração (2.ª Lei de Newton).**

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-15}{0,1} = -150 \text{ m/s}^2.$$

2) **Equação horária do MRUA (com $v_0 = 0$).**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 100 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} (-150) t^2 = 100 - 75 t^2.$$

3) **Instante do cruzamento $x = 0$.**

$$0 = 100 - 75 t^2 \Rightarrow 75 t^2 = 100 \Rightarrow t^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ s} \approx 1,155 \text{ s}.$$

Problema 2 — Queda livre sem atrito (força imediatamente antes do impacto)

Um corpo pequeno e denso, de massa $m = 0,3 \text{ kg}$, cai desde $y = 100 \text{ m}$ em queda livre, sem atrito do ar. *Qual é a força imediatamente antes do impacto?*

1) **Forças presentes.**

Sem atrito do ar, actua apenas o peso: $\vec{F} = m\vec{g}$ (vertical para baixo).

2) **Módulo imediatamente antes do impacto.**

$$|\vec{F}| = mg = 0,3 \times 9,81 \approx \boxed{2,94 \text{ N}}.$$

(Com y positivo para cima, $F_y \approx -2,94 \text{ N}$.)

Problema 3 — Aceleração ao travar numa curva

Um carro de 1 t entra numa curva a 140 km/h e sai a 80 km/h . *Como muda a aceleração? (admite raio R constante e travagem ao longo da curva)*

1) **Conversões de unidades.**

$$v_1 = 140 \text{ km/h} = \frac{140\,000}{3600} \approx 38,9 \text{ m/s}, \quad v_2 = 80 \text{ km/h} = \frac{80\,000}{3600} \approx 22,2 \text{ m/s}.$$

2) **Componente normal (centrípeta) em cada ponto da curva (R constante).**

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_{n1} = \frac{38,9^2}{R}, \quad a_{n2} = \frac{22,2^2}{R}.$$

$$\text{Variação relativa: } \frac{a_{n2}}{a_{n1}} = \left(\frac{22,2}{38,9} \right)^2 \approx \boxed{0,33}.$$

3) **Componente tangencial (travagem).**

$$a_t < 0. \text{ Média temporal: } a_{t,\text{méd}} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}. \text{ Se conheceres o arco } L: a_{t,\text{méd}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2L}.$$

¹movimento rectilíneo uniformemente acelerado

4) Aceleração total (módulo).

$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ (aponta para o centro da curva e para trás).

Nota: a massa não entra na aceleração; entra nas forças (aderência $\sqrt{a_n^2 + a_t^2} \leq \mu g$).

Problema 4 — Movimento paramétrico e decomposição da aceleração

Uma partícula move-se no plano com equações paramétricas (SI²):

$$x(t) = 3t - t^2, \quad y(t) = 4t.$$

- a) Determina a posição e o deslocamento entre $t = 0$ e $t = 2$ s.
- b) Determina o vetor velocidade e a rapidez em $t = 2$ s.
- c) Determina o vetor aceleração e as componentes tangencial a_t e normal a_n em $t = 2$ s (indica também o raio de curvatura R).

Dados: $x(t) = 3t - t^2$, $y(t) = 4t$.

a) Posição e deslocamento entre $t = 0$ e $t = 2$ s.

$$r(0) = (x(0), y(0)) = (0, 0).$$

$$r(2) = (x(2), y(2)) = (3 \cdot 2 - 2^2, 4 \cdot 2) = (6 - 4, 8) = (2, 8).$$

Deslocamento: $\Delta r = r(2) - r(0) = (2, 8)$. *Módulo:* $|\Delta r| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} \approx 8,246$ m.

b) Velocidade e rapidez em $t = 2$ s.

$$\dot{x} = 3 - 2t, \quad \dot{y} = 4 \Rightarrow \vec{v}(t) = (3 - 2t, 4).$$

$$\vec{v}(2) = (-1, 4), \quad |\vec{v}(2)| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,123 \text{ m/s}.$$

c) Aceleração e decomposição a_t e a_n em $t = 2$ s; raio de curvatura R .

Passo 1 — Aceleração: $\ddot{x} = -2$, $\ddot{y} = 0 \Rightarrow \vec{a}(t) = (-2, 0)$.

Passo 2 — Versor tangencial: $\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-1, 4)}{\sqrt{17}}$.

Passo 3 — Componente tangencial a_t :

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{e}_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-2, 0) \cdot (-1, 4)}{\sqrt{17}} = \frac{(-2)(-1) + 0 \cdot 4}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \approx 0,485 \text{ m/s}^2.$$

Passo 4 — Componente normal a_n :

$$(i) \text{ por Pitágoras) } |\vec{a}| = 2 \Rightarrow a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{8}{\sqrt{17}} \approx 1,940 \text{ m/s}^2.$$

$$(ii) \text{ equivalente) } a_n = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{|\vec{v}|} = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{|\vec{v}|} = \frac{|(-1) \cdot 0 - 4 \cdot (-2)|}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}.$$

Passo 5 — Raio de curvatura: $R = \frac{|\vec{v}|^2}{a_n} = \frac{17}{8/\sqrt{17}} = \frac{17\sqrt{17}}{8} \approx 8,76$ m.

(A normal aponta para o centro de curvatura nesse instante.)

²Système international d'unités, sistema internacional de unidades.

Problema 5 — Curva circular a velocidade constante

Um automóvel descreve um arco de círculo de raio $R = 80$ m a rapidez constante $v = 25$ m/s (≈ 90 km/h).

- a) Calcula a aceleração normal a_n .
- b) Para uma massa $m = 1,2$ t, calcula a força lateral (resultante) necessária.
- c) Qual o coeficiente de atrito mínimo $\mu_{\min}$ para não derrapar?

a) Aceleração normal.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25^2}{80} = 7,8125 \text{ m/s}^2 \approx 0,80 g.$$

b) Força lateral (resultante).

$$F_n = m a_n = 1200 \times 7,8125 = 9375 \text{ N} = 9,375 \text{ kN}.$$

c) Coeficiente de atrito mínimo.

$$\mu_{\min} = \frac{a_n}{g} = \frac{7,8125}{9,81} \approx \boxed{0,796}.$$

Problema 6 — Forças tangencial e normal dependentes do tempo

Uma partícula de massa $m = 2$ kg move-se numa trajetória curva. A componente tangencial da força é $F_t(t) = 6 - 2t$ (N) e a normal (para o centro de curvatura) é constante $F_n = 20$ (N). No instante $t = 0$ a rapidez é $v_0 = 0$.

- a) Determina $a_t(t)$ e a_n .
- b) Determina a rapidez $v(t)$ e indica quando o movimento acelera/retarda. Em que instante a rapidez volta a zero?
- c) Expressa o raio de curvatura $R(t)$ e calcula $R(2\text{ s})$.

a) Acelerações tangencial e normal.

$$a_t(t) = \frac{F_t(t)}{m} = \frac{6 - 2t}{2} = 3 - t \text{ (m/s}^2\text{)}, \quad a_n = \frac{F_n}{m} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}^2.$$

b) Rapidez $v(t)$ e análise de sinais.

$$\frac{dv}{dt} = a_t = 3 - t \Rightarrow v(t) = \int (3 - t) dt = 3t - \frac{t^2}{2} + C.$$

$$\text{Como } v(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \text{ logo } \boxed{v(t) = 3t - \frac{t^2}{2}}.$$

Acelera quando $a_t > 0 \Leftrightarrow t < 3$ s; retarda quando $a_t < 0 \Leftrightarrow t > 3$ s.

Zera novamente quando $v(t) = 0 \Rightarrow t(3 - \frac{t}{2}) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $\boxed{t = 6 \text{ s}}$.

c) Raio de curvatura.

$$R(t) = \frac{v(t)^2}{a_n} = \frac{(3t - \frac{t^2}{2})^2}{10}. \text{ Em } t = 2 \text{ s: } v(2) = 6 - 2 = 4 \Rightarrow R(2) = \frac{4^2}{10} = 1,6 \text{ m}.$$

Problema 7 — Tangente, deslocamento e rapidez média

Admite $x(t) = 4t^3$ (SI) e considera o instante $t_0 = 5$ s.

1. Em que instante a rapidez atinge $v = 300 \text{ m/s}$?
2. Determina a equação da recta tangente ao gráfico $x(t)$ no ponto t_0 .
3. Calcula o deslocamento e a distância percorrida entre $t = 0$ e $t = 5 \text{ s}$ e a rapidez média nesse intervalo.

Dados: $x(t) = 4t^3 \Rightarrow v(t) = \dot{x} = 12t^2$.

1) Instante em que $v = 300 \text{ m/s}$.

$$12t^2 = 300 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow \boxed{t = 5 \text{ s}} \quad (t \geq 0).$$

2) Equação da tangente em $t_0 = 5 \text{ s}$.

$$x(5) = 4 \cdot 5^3 = 500 \text{ m}, \quad v(5) = 12 \cdot 5^2 = 300 \text{ m/s}.$$

$$x_{\text{tan}}(t) = x(5) + v(5)(t - 5) = \boxed{500 + 300(t - 5)}.^3$$

3) Deslocamento, distância e rapidez média em $[0, 5]$.

$$\Delta x = x(5) - x(0) = 500 - 0 = 500 \text{ m}.$$

Como $x(t)$ é crescente em $[0, 5]$, a distância percorrida $= \Delta x = 500 \text{ m}$.

$$v_{\text{méd}} = \frac{\text{distância}}{\Delta t} = \frac{500}{5 - 0} = \boxed{100 \text{ m/s}}.$$

Problema 8 — Aceleração instantânea e média; força e potência

Com $x(t) = 4t^3 \Rightarrow v(t) = 12t^2$, $a(t) = 24t$:

1. Determina a aceleração *instantânea* em $t = 5 \text{ s}$ e a *média* no intervalo $[4, 6] \text{ s}$.
2. Para uma massa $m = 2 \text{ kg}$, determina a força $F(t)$ e a taxa de variação da força $\dot{F}(t)$. Avalia em $t = 5 \text{ s}$.
3. Calcula a potência instantânea $P(t) = F(t)v(t)$ em $t = 5 \text{ s}$.

Dados: $v(t) = 12t^2$, $a(t) = 24t$.

1) Aceleração instantânea em $t = 5$ e média em $[4, 6]$.

$$a(5) = 24 \cdot 5 = \boxed{120 \text{ m/s}^2}.$$

$$a_{\text{méd}} = \frac{v(6) - v(4)}{6 - 4} = \frac{12 \cdot 6^2 - 12 \cdot 4^2}{2} = \frac{432 - 192}{2} = \boxed{120 \text{ m/s}^2}.$$

2) Força e taxa de variação da força (massa $m = 2 \text{ kg}$).

$$F(t) = ma(t) = 2 \cdot 24t = 48t \text{ N}, \quad \dot{F}(t) = \frac{dF}{dt} = 48 \text{ N/s}.$$

$$\text{Em } t = 5: F(5) = 48 \cdot 5 = \boxed{240 \text{ N}}.$$

3) Potência instantânea em $t = 5$.

$$P(t) = F(t)v(t) \Rightarrow P(5) = 240 \times 300 = 7,2 \times 10^4 \text{ W} = \boxed{72 \text{ kW}}.$$

³Conforme mencionei nas aulas, esta é a fórmula geral para a tangente de $f(x)$ no ponto $x = a$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. A primeira derivada é o declive da reta.

Problema 9 — Descrição $v(x)$ e $a(x)$ por eliminação do tempo

Partindo de $x(t) = 4t^3$:

1. Isola t em função de x : $t = t(x)$.
2. Expressa v e a como funções de x , isto é, $v(x)$ e $a(x)$.
3. Avalia $v(x)$ e $a(x)$ em $x = 500$ m.

1) Eliminar o tempo: $t = t(x)$.

$$x = 4t^3 \Rightarrow t = \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}.$$

2) Expressões $v(x)$ e $a(x)$.

$$v(x) = 12t^2 = 12\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} = \frac{12}{4^{2/3}} x^{2/3}.$$

$$a(x) = 24t = 24\left(\frac{x}{4}\right)^{1/3} = \frac{24}{4^{1/3}} x^{1/3}.$$

3) Avaliação em $x = 500$ m.

$$t = \left(\frac{500}{4}\right)^{1/3} = 5 \text{ s} \Rightarrow v = 12 \cdot 5^2 = \boxed{300 \text{ m/s}}, \quad a = 24 \cdot 5 = \boxed{120 \text{ m/s}^2}.$$

Problema 10 — Especial: Antiderivada do arroco (obter $a(t)$ e $v(t)$)

Uma partícula move-se em linha curva com *arroco* (jerk) dado por

$$j(t) = 6 - 2t \quad (\text{SI; } j \text{ em m/s}^3).$$

Condições iniciais em $t = 0$: $a(0) = a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ e $v(0) = v_0 = 0 \text{ m/s}$.

1. Determina a aceleração $a(t)$.
2. Determina a rapidez $v(t)$.
3. O que acontece quando $t_0 = 0$, $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ e $v_0 = 0 \text{ m/s}$?

1) Aceleração $a(t)$ a partir do arroco $j(t) = 6 - 2t$.

Uma primitiva de $6 - 2t$ é $6t - t^2$. Usando a condição $a(t_0) = a_0$, ajusta-se a constante por diferença entre antiderivadas em t e t_0 :

$$a(t) = a_0 + [(6t - t^2) - (6t_0 - t_0^2)] = \boxed{a(t) = a_0 + 6(t - t_0) - (t^2 - t_0^2)} \quad (\text{m/s}^2).$$

2) Rapidez $v(t)$ usando $v(t_0) = v_0$.

Uma primitiva de $a(t) = a_0 + 6t - t^2$ é $a_0 t + 3t^2 - \frac{1}{3}t^3$. Ajustando com t_0 :

$$v(t) = v_0 + [a_0(t - t_0)] + [(3t^2 - \frac{1}{3}t^3) - (3t_0^2 - \frac{1}{3}t_0^3)],$$

isto é,

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) + 3(t^2 - t_0^2) - \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3)} \quad (\text{m/s}).$$

3) Caso particular do enunciado: $t_0 = 0$, $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$.

$$a(t) = 1 + 6t - t^2, \quad v(t) = t + 3t^2 - \frac{1}{3}t^3.$$

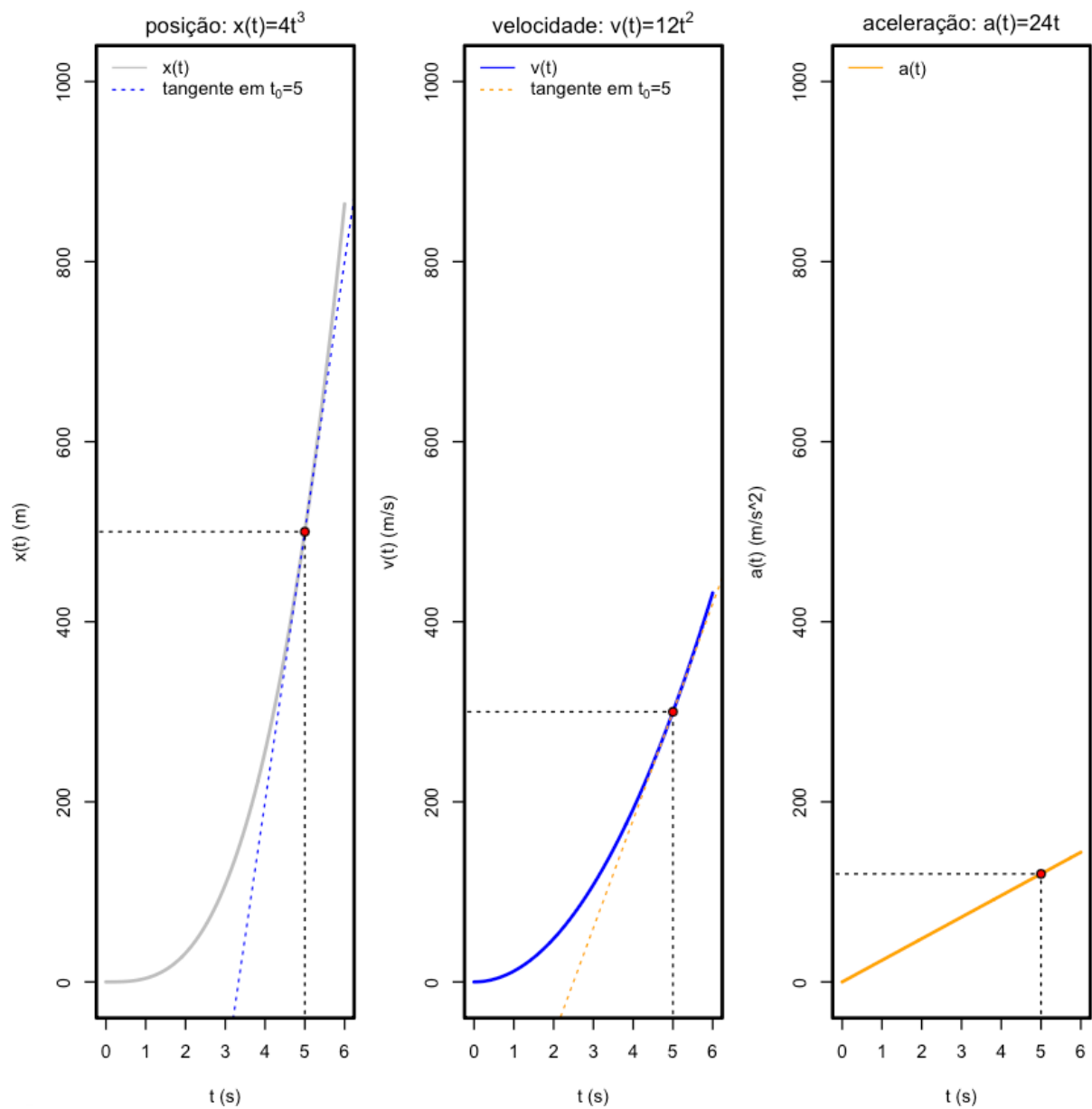


Figura 1: Exemplos gráficos de representação do mesmo movimento ($x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ da esquerda para a direita). A posição da abscissa $t = 5$ s e a sua ordenada correspondente está marcada em todos os gráficos.