

Física 12.º ano

01 Problemas — cinemática da partícula

Versão: 0,3

José Pedro do Amaral

29 de setembro de 2025

Problema 1 — Força constante em MRUA¹

Um corpo de massa $m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}$ sofre uma força horizontal constante $F = -15 \text{ N}$. Parte do repouso em $x_0 = 100 \text{ m}$, o movimento é retilíneo e sem atrito. *Quando cruzará $x = 0 \text{ m}$?*

A aceleração é $a = \frac{F}{m} = \frac{-15}{0,1} = -150 \text{ m/s}^2$.

Com $v_0 = 0$, $x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 = 100 - 75t^2$.

Cruza $x = 0$ quando $0 = 100 - 75t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ s} \approx 1,155 \text{ s}$.

Problema 2 — Queda livre sem atrito (força imediatamente antes do impacto)

Um corpo pequeno e denso, de massa $m = 0,3 \text{ kg}$, cai desde $y = 100 \text{ m}$ em queda livre, sem atrito do ar. *Qual é a força imediatamente antes do impacto?*

Sem atrito, a única força é o peso: $\vec{F} = m\vec{g}$.

Com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$: $|\vec{F}| = 0,3 \times 9,81 \approx 2,94 \text{ N}$.

Convenciona-se $F_y = -2,94 \text{ N}$ se y positivo for para cima.

Problema 3 — Aceleração ao travar numa curva

Um carro de 1 t entra numa curva a 140 km/h e sai a 80 km/h . *Como muda a aceleração? (admite raio R constante e travagem ao longo da curva)*

Converte: $v_1 = 140 \text{ km/h} = 38,9 \text{ m/s}$, $v_2 = 80 \text{ km/h} = 22,2 \text{ m/s}$.

Componente normal (centrípeta): $a_n = \frac{v^2}{R}$.

Entrada: $a_{n1} = \frac{38,9^2}{R}$, saída: $a_{n2} = \frac{22,2^2}{R}$.

¹movimento retilíneo uniformemente acelerado

A componente lateral reduz-se por $\frac{a_{n2}}{a_{n1}} = \frac{22,2^2}{38,9^2} \approx \boxed{0,33}$.

Componente tangencial (travagem): $a_t < 0$.

Média temporal: $a_{t,\text{méd}} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$.

Ou, se souberes o comprimento L da curva: $a_{t,\text{méd}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2L}$.

Aceleração total: $|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, apontando para o centro da curva e para trás (travagem).

Nota: a massa não entra na aceleração; importaria depois para determinar forças e aderência ($\sqrt{a_n^2 + a_t^2} \leq \mu g$).

Tabela 1: Exemplos de derivadas aplicáveis aos problemas da disciplina.

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Condições-Observações
c	0	c constante
nx	n	
x^n	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$ x $	$\frac{x}{ x }$	$x \neq 0$; não derivável em $x = 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$

Nota: conforme mencionado na aula, as derivadas permitem-nos calcular outras grandezas sabendo qual é o modelo matemático do movimento.

Problema 4 — Movimento paramétrico e decomposição da aceleração

Uma partícula move-se no plano com equações paramétricas (SI²):

$$x(t) = 3t - t^2, \quad y(t) = 4t.$$

- Determina a posição e o deslocamento entre $t = 0$ e $t = 2$ s.
- Determina o vetor velocidade e a rapidez em $t = 2$ s.
- Determina o vetor aceleração e as componentes tangencial a_t e normal a_n em $t = 2$ s (indica também o raio de curvatura R).

a) $r(0) = (0, 0)$, $r(2) = (2, 8)$. Deslocamento $\Delta r = (2, 8)$, $|\Delta r| = \sqrt{68} \approx 8,246$ m.

b) $v(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = (3 - 2t, 4) \Rightarrow v(2) = (-1, 4)$. Rapidez $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,123$ m/s.

c) $a(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}) = (-2, 0)$. Em $t = 2$, $\hat{e}_t = \frac{v}{|v|} = \frac{(-1, 4)}{\sqrt{17}}$.

²*Système international d'unités*, sistema internacional de unidades.

Componente tangencial $a_t = a \cdot \hat{e}_t = a \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{(-2, 0) \cdot (-1, 4)}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \approx 0,485 \text{ m/s}^2$.

Módulo $|a| = 2 \Rightarrow a_n = \sqrt{|a|^2 - a_t^2} \approx \sqrt{4 - 0,235} \approx 1,940 \text{ m/s}^2$.

Raio de curvatura $R = \frac{|v|^2}{a_n} = \frac{17}{1,940} \approx 8,76 \text{ m}$ (normal apontando para o centro de curvatura).

Problema 5 — Curva circular a velocidade constante

Um automóvel descreve um arco de círculo de raio $R = 80 \text{ m}$ a rapidez constante $v = 25 \text{ m/s}$ ($\approx 90 \text{ km/h}$).

a) Calcula a aceleração normal a_n .

b) Para uma massa $m = 1,2 \text{ t}$, calcula a força lateral (resultante) necessária.

c) Qual o coeficiente de atrito mínimo $\mu_{\min}$ para não escorregar?

a) $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25^2}{80} = 7,8125 \text{ m/s}^2 \approx 0,80 g$.

b) $F_n = m a_n = 1200 \times 7,8125 = 9375 \text{ N} = 9,375 \text{ kN}$.

c) $\mu_{\min} = \frac{a_n}{g} = \frac{7,8125}{9,81} \approx 0,796$.

Problema 6 — Forças tangencial e normal dependentes do tempo

Uma partícula de massa $m = 2 \text{ kg}$ move-se numa trajetória curva. A componente tangencial da força é $F_t(t) = 6 - 2t$ (N) e a normal (para o centro de curvatura) é constante $F_n = 20$ (N). No instante $t = 0$ a rapidez é $v_0 = 0$.

a) Determina $a_t(t)$ e a_n .

b) Determina a rapidez $v(t)$ e indica quando o movimento acelera/retarda. Em que instante a rapidez volta a zero?

c) Expressa o raio de curvatura $R(t)$ e calcula $R(2 \text{ s})$.

a) $a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{6 - 2t}{2} = 3 - t \text{ (m/s}^2\text{)}, \quad a_n = \frac{F_n}{m} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}^2$.

b) $\frac{dv}{dt} = a_t = 3 - t \Rightarrow v(t) = 3t - \frac{t^2}{2}$ (com $v(0) = 0$).

Acelera enquanto $a_t > 0 \Rightarrow t < 3 \text{ s}$; retarda para $t > 3 \text{ s}$.

$v(t) = 0 \Rightarrow t(3 - \frac{t}{2}) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 6 \text{ s}$ (para de novo aos 6 s, se o modelo se mantiver).

c) $R(t) = \frac{v(t)^2}{a_n} = \frac{(3t - \frac{t^2}{2})^2}{10}$.

Em $t = 2 \text{ s}$: $v(2) = 6 - 2 = 4 \text{ m/s} \Rightarrow R(2) = \frac{4^2}{10} = 1,6 \text{ m}$.

Problema 8 — Tangente, deslocamento e rapidez média

Admite $x(t) = 4t^3$ (SI) e considera o instante $t_0 = 5$ s.

1. Em que instante a rapidez atinge $v = 300$ m/s?
 2. Determina a equação da recta tangente ao gráfico $x(t)$ no ponto t_0 .
 3. Calcula o deslocamento e a distância percorrida entre $t = 0$ e $t = 5$ s e a rapidez média nesse intervalo.
- 1.) $v(t) = 12t^2 = 300 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5$ s (tomando $t \geq 0$).
- 2.) $x(5) = 4 \cdot 5^3 = 500$ m, $v(5) = 300$ m/s $\Rightarrow$ tangente: $x_{\text{tan}}(t) = 500 + 300(t - 5)$.
- 3.) Monótono crescente: $\Delta x = x(5) - x(0) = 500 - 0 = 500$ m. Distância = 500 m.
- 4.) $v_{\text{méd}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{500}{5 - 0} = 100$ m/s.

Tabela 2: Ordens de derivação aplicáveis ao modelo da Fig. 1 e seus nomes.

Ordem	Nome / Símbolo	Expressão
0	Posição $x(t)$	$4t^3$
1	Velocidade $v(t) = \dot{x}$	$12t^2$
2	Aceleração $a(t) = \ddot{x}$	$24t$
3	Arroco $j(t) = \dddot{x}$	24
4	Solicitação $s(t) = x^{(4)}$	0
5	Crepação $c(t) = x^{(5)}$	0
6	Estalido $p(t) = x^{(6)}$	0

Nota: até ao arroco, inclusivé, estas ordens de derivação têm um interesse prático. Contudo, o interesse das outras acima é quase exclusivamente computacional. Por exemplo, o arroco tem relevância nos cálculos de conforto e durabilidade do equipamento.

Problema 9 — Aceleração instantânea e média; força e potência

Com $x(t) = 4t^3 \Rightarrow v(t) = 12t^2$, $a(t) = 24t$:

1. Determina a aceleração *instantânea* em $t = 5$ s e a *média* no intervalo $[4, 6]$ s.
 2. Para uma massa $m = 2$ kg, determina a força $F(t)$ e a taxa de variação da força $\dot{F}(t)$. Avalia em $t = 5$ s.
 3. Calcula a potência instantânea $P(t) = F(t)v(t)$ em $t = 5$ s.
- $a(5) = 24 \cdot 5 = 120$ m/s².
- $a_{\text{méd}} = \frac{v(6) - v(4)}{6 - 4} = \frac{12 \cdot 6^2 - 12 \cdot 4^2}{2} = \frac{432 - 192}{2} = 120$ m/s².

- $F(t) = m a(t) = 2 \cdot 24t = 48t \text{ N}$, $\dot{F}(t) = \frac{dF}{dt} = 48 \text{ N/s}$. Em $t = 5$: $F = 240 \text{ N}$.
- $P(5) = F(5) v(5) = 240 \times 300 = 7,2 \times 10^4 \text{ W} = 72 \text{ kW}$.

Problema 10 — Descrição $v(x)$ e $a(x)$ por eliminação do tempo

Partindo de $x(t) = 4t^3$:

1. Isola t em função de x : $t = t(x)$.
 2. Expressa v e a como funções de x , isto é, $v(x)$ e $a(x)$.
 3. Avalia $v(x)$ e $a(x)$ em $x = 500 \text{ m}$.
- $t = \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}$.
 - $v(x) = 12 t^2 = 12 \left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} = \frac{12}{4^{2/3}} x^{2/3}$.
 - $a(x) = 24 t = 24 \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3} = \frac{24}{4^{1/3}} x^{1/3}$.
 - Em $x = 500 \text{ m} \Rightarrow t = (500/4)^{1/3} = 5 \text{ s} \Rightarrow v = 300 \text{ m/s}$, $a = 120 \text{ m/s}^2$.

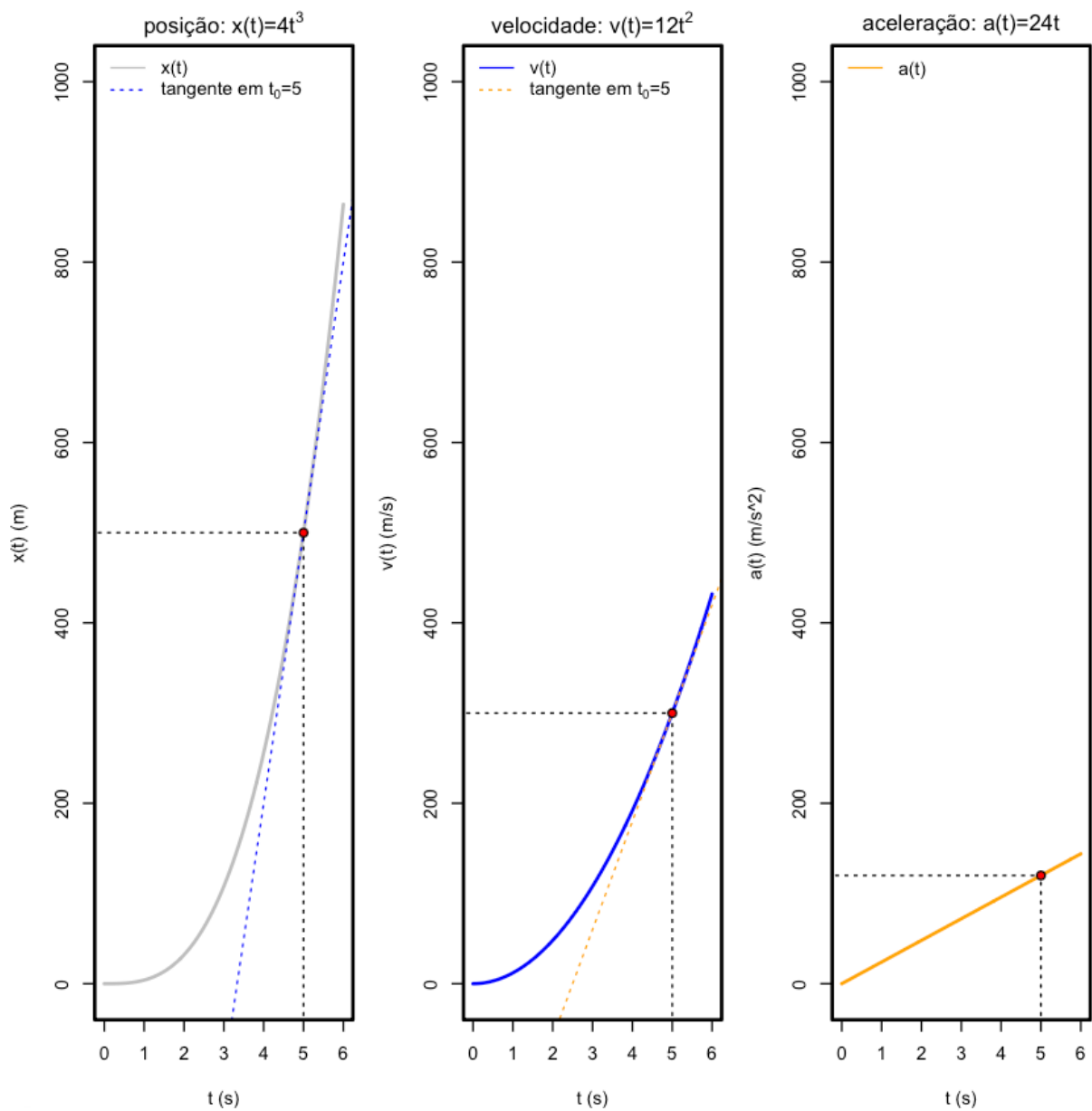


Figura 1: Exemplos gráficos de representação do mesmo movimento ($x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ da esquerda para a direita). A posição da abscissa $t = 5$ s e a sua ordenada correspondente está marcada em todos os gráficos.