

Física 12.º ano
Segundo Teste — trabalho, energia
e estatística I
(versão com respostas)

Versão: 0,1

José Pedro do Amaral

18 de novembro de 2025

Problema 1 — Regressão linear vs. correlação

Uma bióloga mede a massa corporal média (y) de um grupo de girinos em vários tanques com água a diferentes temperaturas (x). Ela suspeita que a temperatura da água possa influenciar a massa média dos girinos.

Noutro estudo, um biólogo mede, em vários charcos, o número de espécies de anfíbios (A) e a área do charco (B), sem pressupor que uma destas grandezas «cause» a outra, querendo apenas saber se existe associação entre elas.

Com base nesta descrição: indica para cada estudo se se deve usar uma análise de regressão linear ou uma análise de correlação; identifica (quando fizer sentido) a variável independente e a variável dependente; e escreve, em cada caso, a hipótese nula H_0 apropriada ($m = 0$ ou $r = 0$), justificando brevemente.

Resposta:

Estudo 1 (girinos: temperatura vs. massa média).

Neste estudo há uma variável que se considera causa plausível (temperatura) e uma variável-resposta (massa média dos girinos). O objectivo é perceber como y varia *em função* de x .

⇒ O procedimento adequado é uma **regressão linear simples**.

variável independente: x = temperatura da água no tanque;

variável dependente: y = massa corporal média dos girinos.

No modelo de regressão linear simples

$$y = b_0 + mx + \varepsilon,$$

a hipótese nula principal sobre a relação entre as variáveis é

$$H_0: m = 0,$$

ou seja, a inclinação é nula: a massa média dos girinos não depende linearmente da temperatura (qualquer variação observada deve-se apenas ao erro aleatório).

Estudo 2 (anfíbios: número de espécies vs. área do charco).

Aqui não se quer atribuir causalidade a nenhuma das variáveis; pretende-se apenas medir **associação linear** entre duas grandezas A (número de espécies) e B (área). As duas variáveis são tratadas de forma simétrica.

⇒ O procedimento adequado é uma **análise de correlação** (por exemplo, correlação de Pearson).

Não faz sentido falar em variável independente e dependente em sentido estrito; estuda-se apenas a força da associação linear. A hipótese nula correspondente é

$$H_0: r = 0,$$

onde r é o coeficiente de correlação: sob H_0 não existe correlação linear entre o número de espécies de anfíbios e a área dos charcos (qualquer associação linear observada deve-se ao acaso da amostragem).

Problema 2 — Trabalho de uma força oblíqua

Uma pessoa, ao limpar a sala de estar, puxa o aspirador aplicando uma força de 45 N. O tubo do aspirador, através do qual a força é aplicada, faz um ângulo de 35° com o tapete. O aspirador é deslocado 2,8 m para a direita.

Qual foi o trabalho realizado pela força aplicada pela pessoa?

Resposta:

O trabalho W de uma força constante $\vec{F}$ ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre a força e o deslocamento.

Aqui:

$$F = 45 \text{ N}, \quad d = 2,8 \text{ m}, \quad \theta = 35^\circ$$

(pois o tubo faz 35° com o tapete, que é horizontal, tal como o deslocamento do aspirador).

Calculamos:

$$W = 45 \times 2,8 \times \cos 35^\circ.$$

$$45 \times 2,8 = 126,$$

$$\cos 35^\circ \approx 0,819,$$

$$W \approx 126 \times 0,819 \approx 1,03 \times 10^2 \text{ J}.$$

Trabalho realizado pela força aplicada pela pessoa:

$$W \approx 1,03 \times 10^2 \text{ J}.$$

O trabalho é positivo porque a força tem uma componente na mesma direcção do movimento do aspirador.

Problema 3 — Trabalho contra a gravidade e deslocamento horizontal

Uma pessoa levanta um calhau de massa m até uma altura h acima do solo e depois caminha uma distância horizontal d mantendo o calhau sempre à mesma altura h .

Qual é o trabalho realizado:

- a) pela pessoa (na direcção vertical e na direcção horizontal)?
- b) pela força gravítica?

Justifica cuidadosamente as respostas.

Resposta:

Vamos separar o movimento em duas fases: (1) subida vertical do calhau até h ; (2) deslocamento horizontal à altura constante h .

a) Trabalho realizado pela pessoa

Fase 1: subida vertical

Para elevar o calhau desde uma altura inicial (que tomamos como 0) até à altura h , a pessoa aplica uma força aproximadamente igual ao peso, $F \approx mg$, dirigida para cima. Admitindo velocidade aproximadamente constante, o trabalho da força da pessoa é

$$W_{\text{pessoa, vert}}^{(\text{subida})} = F h \approx mgh.$$

Este trabalho é **positivo** porque a força da pessoa e o deslocamento vertical são paralelos (ambos para cima).

Fase 2: deslocamento horizontal

Ao caminhar mantendo a altura constante, o calhau não se desloca verticalmente; logo, durante esta fase,

$$W_{\text{pessoa, vert}}^{(\text{caminhar})} = 0.$$

Se desprezarmos atritos (o calhau está apenas “ao colo”), a pessoa não precisa de exercer uma força horizontal contínua sobre o calhau; por isso, o trabalho na direcção horizontal é

$$W_{\text{pessoa, horiz}} = 0.$$

Resumo para a pessoa:

$$W_{\text{pessoa, vert}} = +mgh \quad (\text{na subida}), \quad W_{\text{pessoa, horiz}} = 0.$$

b) Trabalho realizado pela força gravítica

O peso $\vec{P} = m\vec{g}$ é sempre vertical para baixo.

Fase 1: subida vertical

O deslocamento é para cima, enquanto o peso é para baixo; o ângulo entre força e deslocamento é 180° :

$$W_{\text{grav}}^{(\text{subida})} = P h \cos 180^\circ = mgh(-1) = -mgh.$$

O trabalho da gravidade é **negativo** porque a força se opõe ao movimento.

Fase 2: deslocamento horizontal

Durante o percurso horizontal, o deslocamento é perpendicular à força gravítica (vertical), pelo que

$$W_{\text{grav}}^{(\text{caminhar})} = 0.$$

Resumo para a gravidade:

$$W_{\text{grav}} = -mgh \quad \text{na subida,} \quad W_{\text{grav}} = 0 \quad \text{no deslocamento horizontal.}$$

Problema 4 — Energia num sistema bloco-mola sem atrito

Um bloco de 0,40 kg está ligado a uma mola horizontal num carrinho de ar, sobre uma superfície sem atrito. A partir da posição de equilíbrio, o bloco é puxado 0,060 m para a direita. Nessa posição, a mola exerce sobre o bloco uma força $F_m = -9,0$ N (para a esquerda), que pode ser descrita por

$$F_m = -kx.$$

- a) Determina a constante da mola k .
- b) Calcula a rapidez do bloco ao passar pela posição de equilíbrio depois de ser largado a partir do repouso nessa posição deslocada. $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2$ é a energia potencial elástica da mola para uma deformação x em relação à posição de equilíbrio. Num sistema sem atrito, ao passar pela posição de equilíbrio, essa energia transformou-se inteiramente em energia cinética, pelo que $K = \frac{1}{2}mv^2$ e $E_{\text{el}} = 0$.

Resposta:

Dados:

$m = 0,40$ kg, $x_{\text{max}} = 0,060$ m (deslocamento a partir do equilíbrio), $F_m = -9,0$ N.

a) Constante da mola k

Pela lei de Hooke:

$$F_m = -kx.$$

Em módulo:

$$|F_m| = k|x| \quad \Rightarrow \quad k = \frac{|F_m|}{|x|} = \frac{9,0}{0,060}.$$

$$k = 1,50 \times 10^2 \text{ N/m}.$$

b) Rapidez ao passar pela posição de equilíbrio

Na posição de máximo afastamento ($x = x_{\text{max}} = 0,060$ m), o bloco é largado do repouso:

$$K_{\text{inicial}} = 0, \quad E_{\text{el, inicial}} = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2.$$

Na posição de equilíbrio tomamos $E_{\text{el}} = 0$, e toda a energia é cinética:

$$E_{\text{el, final}} = 0, \quad K_{\text{final}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Como não há atrito, a energia mecânica conserva-se:

$$E_{\text{el, inicial}} + K_{\text{inicial}} = E_{\text{el, final}} + K_{\text{final}},$$

$$\frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Cancelando o factor 1/2:

$$kx_{\text{max}}^2 = mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}} x_{\text{max}}.$$

Calculamos $E_{\text{el, inicial}}$:

$$E_{\text{el, inicial}} = \frac{1}{2} \times 150 \times (0,060)^2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 0,0036 = 0,27 \text{ J.}$$

Logo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0,27 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \times 0,27}{0,40}} = \sqrt{\frac{0,54}{0,40}} = \sqrt{1,35} \approx 1,16 \text{ m/s.}$$

Rapidez do bloco ao passar pelo equilíbrio:

$$v \approx 1,16 \text{ m/s.}$$

Problema 5 — Teorema trabalho-energia (força constante)

Um carrinho de laboratório de massa 1,8 kg encontra-se inicialmente em repouso sobre uma pista horizontal. Um aluno aplica ao carrinho uma força constante na direcção do movimento, fazendo com que ele se desloque 2,5 m. O trabalho total realizado sobre o carrinho durante esse deslocamento é 15 J.

Usando o teorema trabalho-energia (o trabalho total realizado sobre um corpo é igual à variação da sua energia cinética), determina a rapidez do carrinho no fim dos 2,5 m de deslocamento.

Resposta:

Dados:

$m = 1,8 \text{ kg}$, $W_{\text{total}} = 15 \text{ J}$, $v_i = 0$.

O teorema trabalho-energia diz:

$$W_{\text{total}} = \Delta K = K_f - K_i,$$

onde $K = \frac{1}{2}mv^2$.

1. Energia cinética final

Como o carrinho parte do repouso,

$$K_i = 0.$$

Logo,

$$W_{\text{total}} = K_f - 0 = K_f \quad \Rightarrow \quad K_f = 15 \text{ J}.$$

2. Cálculo da rapidez final

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2K_f}{m}.$$

Substituindo:

$$v_f^2 = \frac{2 \times 15}{1,8} = \frac{30}{1,8} \approx 16,7,$$

$$v_f = \sqrt{16,7} \approx 4,08 \text{ m/s}.$$

Rapidez do carrinho no fim do deslocamento:

$$v_f \approx 4,08 \text{ m/s}.$$

Problema 6 — Perda de energia cinética por fricção

Um bloco de 1,8 kg desliza sobre uma mesa horizontal. Entra numa região rugosa onde passa a estar sujeito apenas a uma força de fricção cinética de intensidade constante $f = 2,5 \text{ N}$, oposta ao movimento. No instante em que entra na região rugosa, a sua rapidez é $v_i = 3,6 \text{ m/s}$.

Admitindo que, nesse trecho, a única força com componente na direcção do movimento é a força de fricção, usa a relação

$$\Delta K = -f s$$

para determinar a distância s que o bloco percorre desde que entra na região rugosa até parar completamente.

Resposta:

Dados:

$m = 1,8 \text{ kg}$, $v_i = 3,6 \text{ m/s}$, $v_f = 0$, $f = 2,5 \text{ N}$.

Temos

$$\Delta K = -f s.$$

1. Energia cinética inicial

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 1,8 \times (3,6)^2.$$

$$(3,6)^2 = 12,96,$$

$$K_i = 0,9 \times 12,96 \approx 11,7 \text{ J}.$$

Como o bloco pára, $K_f = 0$, logo

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - K_i = -K_i.$$

2. Igualar à expressão com fricção

$$\Delta K = -f s \quad \Rightarrow \quad -K_i = -f s \quad \Rightarrow \quad K_i = f s.$$

Logo,

$$s = \frac{K_i}{f} = \frac{11,7}{2,5} \approx 4,67 \text{ m}.$$

Distância percorrida até parar:

$$s \approx 4,67 \text{ m}.$$

Problema 7 — Potência e energia em aparelhos eléctricos

Uma lâmpada incandescente tem a potência de 60 W.

Explica, com uma frase, o que significa, em termos de potência, dizer que a lâmpada é de 60 W.

Calcula o trabalho (energia transformada) pela lâmpada se ficar acesa durante 2,0 h.

- a) Começa por escrever a expressão da potência instantânea: $P = \frac{dW}{dt}$. Admitindo que a potência é constante, reescreve-a como $P = \frac{W}{t}$.
- b) A partir dessa expressão, obtém uma fórmula para o trabalho W em função de P e t .
- c) Usa $P = 60 \text{ W}$ e $t = 2,0 \text{ h}$ (não te esqueças de converter para segundos) para calcular W em joule (J). Escreve o resultado anterior em quilowatt-hora (kWh).
- d) Indica, justificando, qual das seguintes grandezas é unidade de potência e qual é unidade de energia:
- 1) W
 - 2) kWh
- e) Um secador de cabelo tem potência de 1,8 kW e funciona durante 8,0 min.
- 1) Calcula a energia transformada pelo secador em joule (J).
 - 2) Calcula a mesma energia em kWh.

Apresenta todos os resultados com três algarismos significativos.

Resposta:

Significado de 60 W.

Dizer que a lâmpada é de 60 W significa que, quando ligada à tensão nominal, transforma energia eléctrica em energia luminosa e térmica à razão de 60 J por segundo:

$$P = 60 \text{ W} = 60 \text{ J/s.}$$

a) De $P = \frac{dW}{dt}$ para $P = \frac{W}{t}$

Por definição,

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Se a potência for constante no intervalo de tempo considerado, a energia transformada é proporcional ao tempo:

$$P = \frac{W}{t} \quad \Leftrightarrow \quad W = Pt.$$

b) Fórmula para o trabalho W

Da expressão anterior obtemos directamente:

$$W = Pt.$$

c) Energia transformada pela lâmpada em 2,0 h

Primeiro convertamos o tempo para o SI:

$$t = 2,0 \text{ h} = 2,0 \times 3600 \text{ s} = 7200 \text{ s}.$$

Aplicando $W = Pt$:

$$W = 60 \times 7200 = 432000 \text{ J} = 4,32 \times 10^5 \text{ J}.$$

Para converter em kWh,

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}.$$

Logo,

$$W = \frac{4,32 \times 10^5}{3,6 \times 10^6} \text{ kWh} \approx 0,120 \text{ kWh}.$$

d) Unidade de potência vs. unidade de energia

- 1) W (watt) é unidade de **potência**: joule por segundo (J/s).
- 2) kWh (quilowatt-hora) é unidade de **energia**: é a energia transformada por um aparelho de 1 kW a funcionar durante 1 h.

e) Secador de cabelo (1,8 kW durante 8,0 min)

Potência:

$$P = 1,8 \text{ kW} = 1800 \text{ W}.$$

Tempo:

$$t = 8,0 \text{ min} = 8,0 \times 60 \text{ s} = 480 \text{ s}.$$

1) *Energia em joule*

$$W = Pt = 1800 \times 480 = 864000 \text{ J} = 8,64 \times 10^5 \text{ J}.$$

2) *Energia em kWh*

Podemos usar directamente

$$W = Pt = 1,8 \text{ kW} \times \frac{8,0}{60} \text{ h} = 1,8 \times 0,133\bar{3} \text{ kWh} \approx 0,240 \text{ kWh}.$$

Conclusão: o secador transforma cerca de $8,64 \times 10^5 \text{ J}$, o que corresponde a 0,240 kWh.

Problema 8 — Energia cinética relativista vs. clássica

Um próton de massa de repouso $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg é acelerado num acelerador linear até atingir a rapidez $v = 0,75c$, onde $c = 3,0 \times 10^8$ m/s é a rapidez da luz no vácuo.

- a) Calcula a energia cinética relativista K_{rel} do próton quando atinge a rapidez $v = 0,75c$, usando

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right).$$

- b) Calcula a energia cinética clássica correspondente, usando $K_{\text{class}} = \frac{1}{2}mv^2$.

- c) Compara os dois resultados, determinando:

o quociente $K_{\text{rel}}/K_{\text{class}}$;

o erro relativo da expressão clássica, em percentagem, quando aplicada a esta rapidez.

Indica todas as respostas em joule (J), com três algarismos significativos.

Resposta:

Dados:

$m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $c = 3,0 \times 10^8$ m/s, $v = 0,75c$.

a) Energia cinética relativista

Primeiro calculamos o factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Como $v = 0,75c$,

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = (0,75)^2 = 0,5625,$$

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - 0,5625 = 0,4375,$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{0,4375}} \approx 1,51.$$

A energia cinética relativista é

$$K_{\text{rel}} = mc^2(\gamma - 1).$$

Calculamos mc^2 :

$$mc^2 = (1,67 \times 10^{-27}) \times (3,0 \times 10^8)^2 = 1,67 \times 10^{-27} \times 9,0 \times 10^{16} \approx 1,50 \times 10^{-10} \text{ J}.$$

Logo:

$$K_{\text{rel}} \approx (1,50 \times 10^{-10}) \times (1,51 - 1) \approx (1,50 \times 10^{-10}) \times 0,512 \approx 7,69 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

b) Energia cinética clássica

A expressão clássica é

$$K_{\text{class}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Com $v = 0,75c$,

$$v^2 = (0,75c)^2 = 0,5625 c^2.$$

Logo:

$$K_{\text{class}} = \frac{1}{2}m(0,5625c^2) = 0,28125 mc^2.$$

Usando $mc^2 \approx 1,50 \times 10^{-10}$ J:

$$K_{\text{class}} \approx 0,28125 \times 1,50 \times 10^{-10} \approx 4,23 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

c) Comparação das duas energias

Quociente $K_{\text{rel}}/K_{\text{class}}$:

$$\frac{K_{\text{rel}}}{K_{\text{class}}} \approx \frac{7,69 \times 10^{-11}}{4,23 \times 10^{-11}} \approx 1,82.$$

A energia cinética real (relativista) é cerca de 1,82 vezes a energia dada pela expressão clássica.

Erro relativo da expressão clássica

Tomando como valor de referência o valor relativista,

$$\text{erro relativo} = \frac{K_{\text{rel}} - K_{\text{class}}}{K_{\text{rel}}} \times 100\%.$$

$$\text{erro relativo} \approx \frac{7,69 - 4,23}{7,69} \times 100\% = \frac{3,46}{7,69} \times 100\% \approx 45\%.$$

Conclusão: para $v = 0,75c$ a expressão clássica subestima a energia cinética do próton em cerca de 45 %, pelo que já não é adequada.

Problema 9 — Explosão de um foguetão: conservação do momento linear

Um foguetão de massa M desloca-se verticalmente para cima com uma rapidez de 320 m/s. Quando chega a uma altitude de 1200 m explode em três fragmentos e o seu motor deixa de funcionar. As forças explosivas são internas ao sistema. Os fragmentos têm todos a mesma massa: $M/3$.

O fragmento I continua em ascensão vertical com uma rapidez de 460 m/s; o fragmento II desloca-se horizontalmente para Este com uma rapidez de 260 m/s; e o fragmento III tem uma velocidade desconhecida.

- Qual é o vector velocidade do fragmento III imediatamente a seguir à explosão? (Indica os componentes vertical e horizontal.)
- Qual é a rapidez do fragmento III imediatamente a seguir à explosão?
- Qual é a posição do centro de massa do sistema em relação ao chão 3,0 s após a explosão? (Admite que, depois da explosão, apenas a gravidade actua sobre os fragmentos.)

Resposta:

Tomemos o eixo vertical y para cima e o eixo horizontal x para Este.

Antes da explosão

O foguetão tem velocidade

$$\vec{v}_0 = (0; 320) \text{ m/s.}$$

O momento linear total é

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = M\vec{v}_0 = (0; 320M).$$

Depois da explosão

Cada fragmento tem massa $M/3$. As forças explosivas são internas, pelo que o momento total imediatamente após a explosão é igual ao momento inicial.

Velocidades conhecidas:

$$\vec{v}_1 = (0; 460) \text{ m/s}, \quad \vec{v}_2 = (260; 0) \text{ m/s},$$

$$\vec{v}_3 = (v_{3x}; v_{3y}).$$

Conservação do momento:

$$\vec{p}_{\text{final}} = \sum_{i=1}^3 \frac{M}{3} \vec{v}_i = \vec{p}_{\text{inicial}}.$$

Multiplicando ambos os membros por $3/M$:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 3\vec{v}_0.$$

Como $\vec{v}_0 = (0; 320)$, temos

$$3\vec{v}_0 = (0; 960) \text{ m/s.}$$

Logo:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (0; 960).$$

Componentes em x :

$$\begin{aligned}v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} &= 0, \\0 + 260 + v_{3x} &= 0 \quad \Rightarrow \quad v_{3x} = -260 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

Componentes em y :

$$\begin{aligned}v_{1y} + v_{2y} + v_{3y} &= 960, \\460 + 0 + v_{3y} &= 960 \quad \Rightarrow \quad v_{3y} = 500 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

a) Vector velocidade do fragmento III

$$\boxed{\vec{v}_3 = (-260; 500) \text{ m/s}.}$$

O fragmento III desloca-se para Oeste (componente x negativa) e para cima.

b) Rapidez do fragmento III

A rapidez é o módulo do vector velocidade:

$$\begin{aligned}v_3 &= \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{(-260)^2 + 500^2}. \\(-260)^2 &= 67600, \quad 500^2 = 250000, \\v_3 &= \sqrt{67600 + 250000} = \sqrt{317600} \approx 5,64 \times 10^2 \text{ m/s}.\end{aligned}$$
$$\boxed{v_3 \approx 5,64 \times 10^2 \text{ m/s}.}$$

c) Posição do centro de massa 3,0 s após a explosão

Depois da explosão, apenas a gravidade actua como força externa sobre o sistema dos três fragmentos. O movimento do centro de massa (CM) é o mesmo que teria o foguetão, de massa M , se não tivesse explodido.

Assim, o CM:

tem velocidade horizontal inicial nula ($v_{0x} = 0$);

tem velocidade vertical inicial $v_{0y} = 320 \text{ m/s}$;

está na altura inicial $y_0 = 1200 \text{ m}$ no instante da explosão.

Tomando y positivo para cima e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, o movimento vertical é

$$y_{\text{CM}}(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Para $t = 3,0 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}y_{\text{CM}} &= 1200 + 320 \times 3 - \frac{1}{2} \times 9,8 \times 3^2. \\320 \times 3 &= 960, \quad 3^2 = 9, \\ \frac{1}{2} \times 9,8 \times 9 &= 4,9 \times 9 = 44,1. \\y_{\text{CM}} &= 1200 + 960 - 44,1 = 2160 - 44,1 \approx 2,12 \times 10^3 \text{ m}.\end{aligned}$$

Horizontalmente,

$$x_{\text{CM}}(t) = 0,$$

pois a velocidade horizontal inicial era nula e não há forças horizontais externas.

Posição do centro de massa após 3,0 s:

$$x_{\text{CM}} = 0, \quad y_{\text{CM}} \approx 2,12 \times 10^3 \text{ m.}$$

O CM encontra-se ainda a subir, exactamente acima do ponto onde ocorreu a explosão.

Problema 10 — Foguetão e conservação do momento (equação do foguetão)

Um foguetão no espaço tem uma rapidez inicial de $v_0 = 2,8 \times 10^3 \text{ m/s}$ em relação à Terra. Com os motores ligados, o foguetão ejecta combustível com uma rapidez de $v_e = 4,5 \times 10^3 \text{ m/s}$ na direcção oposta à do movimento do foguetão (rapidez de ejeção em relação ao foguetão).

- a) Qual é a rapidez do foguetão em relação à Terra quando a sua massa for um terço da sua massa inicial? (Sugestão: admite que não há forças externas relevantes e usa a forma apropriada da equação do foguetão.)
- b) Qual será o seu empuxo se queimar combustível com uma taxa de 45 kg/s ?

Resposta:

Dados:

$$v_0 = 2,8 \times 10^3 \text{ m/s}, v_e = 4,5 \times 10^3 \text{ m/s}, m_f = \frac{1}{3}m_0.$$

a) Rapidez quando a massa é $m_0/3$

Na ausência de forças externas relevantes, a equação do foguetão (Tsiolkovski) é

$$v - v_0 = v_e \ln \left(\frac{m_0}{m} \right),$$

onde m_0 é a massa inicial e m a massa num dado instante.

Quando $m = m_f = m_0/3$,

$$v - v_0 = v_e \ln \left(\frac{m_0}{m_0/3} \right) = v_e \ln(3).$$

Logo:

$$v = v_0 + v_e \ln 3.$$

Usando $\ln 3 \approx 1,10$:

$$\Delta v = v_e \ln 3 \approx 4,5 \times 10^3 \times 1,10 \approx 4,94 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

$$v \approx 2,8 \times 10^3 + 4,94 \times 10^3 \approx 7,74 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

Rapidez do foguetão quando a massa é um terço da inicial:

$$v \approx 7,74 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

b) Empuxo para uma taxa de queima $\dot{m} = 45 \text{ kg/s}$

O módulo da força de propulsão (empuxo do foguetão) é

$$F = v_e \dot{m},$$

onde $\dot{m}$ é a taxa de ejeção de massa (em kg/s) e v_e a rapidez de ejeção em relação ao foguetão.

Com

$$v_e = 4,5 \times 10^3 \text{ m/s}, \quad \dot{m} = 45 \text{ kg/s},$$

temos:

$$F = 4,5 \times 10^3 \times 45 = 2,03 \times 10^5 \text{ N}.$$

Empuxo do foguetão:

$$F \approx 2,03 \times 10^5 \text{ N}.$$