

Física 12.º ano
Segundo Teste — trabalho, energia e
estatística I
(versão com respostas)

Versão: 1,0

José Pedro do Amaral

23 de novembro de 2025

A propósito de K : do regime relativista ao regime clássico, aproximação e limitações numéricas

Este texto tentará responder a duas perguntas feitas na aula acerca da compatibilidade da abordagem newtoniana e relativista para determinar K . Quando dizemos que $v \ll c$, estamos a afirmar que a razão $\frac{v}{c}$ é um número muito pequeno. Num cálculo concreto, a expectativa física natural *não* é substituir directamente $\frac{v^2}{c^2}$ por zero, mas sim inserir o valor de v na expressão relativista completa e obter um valor de energia cinética que, para velocidades baixas, coincida praticamente com o valor newtoniano:

$$K_{\text{clássica}}(v) = \frac{1}{2}mv^2.$$

De facto, a Física garante-nos exactamente isso: para $v \ll c$, a expressão relativista de $K(v)$ aproxima-se muito da expressão clássica.

Contudo, e isto é a parte que poderá correr mal, se se fizer a conta num computador com aritmética de vírgula flutuante (por exemplo, em R com números `double`), poderia surgir um fenómeno de **cancelamento catastrófico**.

Por exemplo, considere-se o caso particular

$$m = 2 \text{ kg}, \quad v = 10 \text{ m/s}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s},$$

a energia cinética clássica é

$$K_{\text{clássica}} = \frac{1}{2}mv^2 = 100 \text{ J},$$

e a expressão relativista

$$K_{\text{rel}}(v) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

deveria dar, com grande precisão, **o mesmo valor!** No entanto, em R com aritmética `double`, a avaliação directa desta expressão pode produzir um resultado cerca de 119,9 J! Isto não é um erro de Física, mas sim um erro *numérico* — um erro computacional: a quantidade $\gamma - 1$ é extremamente pequena, e na forma

$$\gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

está escondida como uma diferença entre dois números quase iguais, ambos muito perto de 1. Subtrair números quase iguais destrói muitos dígitos significativos na representação em vírgula flutuante; é precisamente isto que se chama **cancelamento catastrófico**. O erro relativo em $\gamma - 1$ é depois amplificado por c^2 quando calculamos $K(v)$.

Outra vez, este problema é numérico, não físico, pois se repetirmos a mesma conta com computação aritmética de *alta exactidão* (por exemplo, usando o pacote `Rmpfr` em R), obtemos de novo um valor de K praticamente igual aos 100 J clássicos, mesmo usando *exactamente a mesma* expressão relativista. Um exemplo de código em R é:

```
library(Rmpfr)

m <- 2
v <- 10
c <- 3e8

## Cálculo com double (precisão padrão do R)
K_double <- (2 * c^2) * ((1/sqrt(1 - (v/c)^2)) - 1)
K_double

## Cálculo com alta precisão (Rmpfr)
prec <- 200 # bits de precisão

m_mp <- mpfr(m, precBits = prec)
v_mp <- mpfr(v, precBits = prec)
c_mp <- mpfr(c, precBits = prec)

K_mpfr <- (2 * c_mp^2) * ((1/sqrt(1 - (v_mp/c_mp)^2)) - 1)
K_mpfr
asNumeric(K_mpfr)
```

Com precisão aumentada, o resultado é algo como

$$K_{\text{mpfr}} \approx 100,000000000000083 \dots \text{ J},$$

ou seja, 100 J dentro de um erro completamente desprezável para qualquer aplicação física realista. Assim, a expressão relativista *por si só* já contém o limite clássico correcto; o problema, neste exemplo concreto, reside apenas na forma como a subtracção é feita com precisão finita em vírgula flutuante.

E para fechar o assunto: aproximação analítica para $v \ll c$

Para compreender de forma geral por que razão a energia cinética relativista se reduz à expressão clássica quando $v \ll c$, e para obter a forma explícita das correcções relativistas, introduzimos o parâmetro adimensional

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

A expressão de γ torna-se então

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

A condição de velocidade baixa escreve-se simplesmente como $|\beta| \ll 1$. Em vez de substituir β por zero (o que anularia toda a dependência em v), aproximamos a função $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ por uma série em potências de β , usando a fórmula binomial generalizada:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \dots,$$

válida para $|x| < 1$. No nosso caso,

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 + x)^\alpha \quad \text{com} \quad x = -\beta^2, \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Substituindo,

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \dots$$

e calculando os primeiros coeficientes:

$$\begin{aligned} \alpha x &= \left(-\frac{1}{2}\right)(-\beta^2) = \frac{1}{2}\beta^2, \\ \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2}(-\beta^2)^2 \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\beta^4 \\ &= \frac{3}{4}\beta^4 = \frac{3}{8}\beta^4. \end{aligned}$$

Portanto, até à ordem β^4 ,

$$\gamma(v) = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

e, consequentemente,

$$\gamma(v) - 1 \approx \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

donde

$$K(v) = (\gamma(v) - 1) mc^2 \approx \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right) mc^2.$$

Reescrevendo em função de v e c (isto é, $\beta = v/c$),

$$\begin{aligned} K(v) &\approx \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) mc^2 \\ &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

O primeiro termo é exactamente a energia cinética clássica de Newton,

$$K_{\text{clássica}} = \frac{1}{2} mv^2,$$

e os termos seguintes são correcções relativistas cada vez mais pequenas, proporcionais a potências superiores de $\frac{v}{c}$. Não existe um limiar físico abrupto entre «regime clássico» e «regime relativista»; o que existe é uma aproximação cujo erro relativo diminui à medida que $|\beta|$ se torna mais pequeno. Para velocidades correntes em problemas de Mecânica clássica, $\frac{v}{c}$ é tão pequeno que o termo $\frac{1}{2} mv^2$ domina completamente e as correcções relativistas são desprezáveis, quer do ponto de vista físico, quer do ponto de vista numérico.

Problema 1 — Energia cinética relativista vs. clássica

Um protão de massa de repouso $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg é acelerado num acelerador linear até atingir a rapidez $v = 0,75c$, onde $c = 3,0 \times 10^8$ m/s é a rapidez da luz no vácuo.

- a) Calcula a energia cinética relativista K_{rel} do protão quando atinge a rapidez $v = 0,75c$, usando

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right).$$

- b) Calcula a energia cinética clássica correspondente, usando $K_{\text{class}} = \frac{1}{2} mv^2$.
- c) Compara os dois resultados, determinando:
- o quociente $K_{\text{rel}}/K_{\text{class}}$;
 - o erro relativo da expressão clássica, em percentagem, quando aplicada a esta rapidez.
- Indica todas as respostas em joule (J), com três algarismos significativos.

Resposta:

Dados: $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $c = 3,0 \times 10^8$ m/s, $v = 0,75c$.

a) Energia cinética relativista

Primeiro calculamos o factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,75^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5625}} = \frac{1}{\sqrt{0,4375}} \approx 1,5119.$$

A energia cinética relativista é:

$$K_{\text{rel}} = (\gamma - 1)mc^2.$$

Calculamos mc^2 :

$$mc^2 = (1,67 \times 10^{-27})(3,0 \times 10^8)^2 = 1,67 \times 10^{-27} \times 9,0 \times 10^{16} = 1,503 \times 10^{-10} \text{ J}.$$

Logo:

$$K_{\text{rel}} = (1,5119 - 1) \times 1,503 \times 10^{-10} \approx 0,5119 \times 1,503 \times 10^{-10} \approx 7,69 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

b) Energia cinética clássica

$$K_{\text{class}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(0,75c)^2 = \frac{1}{2}m(0,75^2c^2) = \frac{1}{2} \times 0,5625 mc^2 = 0,28125 mc^2.$$

Usando $mc^2 = 1,503 \times 10^{-10} \text{ J}$:

$$K_{\text{class}} \approx 0,28125 \times 1,503 \times 10^{-10} \approx 4,23 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

c) Comparação

Quociente:

$$\frac{K_{\text{rel}}}{K_{\text{class}}} \approx \frac{7,69 \times 10^{-11}}{4,23 \times 10^{-11}} \approx 1,82.$$

Erro relativo da expressão clássica (tomando a relativista como referência):

$$\text{erro} = \frac{K_{\text{rel}} - K_{\text{class}}}{K_{\text{rel}}} \times 100\% \approx \frac{7,69 - 4,23}{7,69} \times 100\% \approx 45,1\%.$$

Resposta (3 algarismos significativos): $K_{\text{rel}} \approx 7,69 \times 10^{-11} \text{ J}$, $K_{\text{class}} \approx 4,23 \times 10^{-11} \text{ J}$,

$$\frac{K_{\text{rel}}}{K_{\text{class}}} \approx 1,82, \quad \text{erro relativo} \approx 45,1\%.$$

Problema 2 — Regressão linear vs. correlação

Uma bióloga mede a massa corporal média (y) de um grupo de girinos em vários tanques com água a diferentes temperaturas (x). Ela suspeita que a temperatura da água possa influenciar a massa média dos girinos.

Noutro estudo, um biólogo mede, em vários charcos, o número de espécies de anfíbios (A) e a área do charco (B), sem pressupor que uma destas grandezas «cause» a outra, querendo apenas saber se existe associação entre elas.

Com base nesta descrição: indica para cada estudo se se deve usar uma análise de regressão linear ou uma análise de correlação; identifica (quando fizer sentido) a variável independente e a variável dependente; e escreve, em cada caso, a hipótese nula H_0 apropriada ($m = 0$ ou $r = 0$), justificando brevemente.

Resposta:

Primeiro estudo (girinos e temperatura):

Há uma suspeita de *causalidade* (a temperatura influencia a massa média). Faz sentido escolher uma variável independente e uma dependente.

Método: **regressão linear**.

Variável independente: x = temperatura da água.

Variável dependente: y = massa corporal média dos girinos.

Hipótese nula:

$$H_0 : m = 0$$

onde m é o declive da recta de regressão. Isto corresponde a dizer que não há relação linear entre a temperatura e a massa (a recta é horizontal).

Segundo estudo (número de espécies vs. área do charco):

O investigador não pretende atribuir causalidade, apenas verificar se as duas grandezas variam *conjuntamente*.

Método: **correlação** (por exemplo, coeficiente de correlação de Pearson).

Não se distingue aqui variável independente e dependente: A e B são apenas duas variáveis em análise conjunta.

Hipótese nula:

$$H_0 : r = 0$$

onde r é o coeficiente de correlação. Isto significa ausência de correlação linear entre área do charco e número de espécies de anfíbios.

Problema 3 — Trabalho de uma força oblíqua

Uma pessoa, ao limpar a sala de estar, puxa o aspirador aplicando uma força de 45 N. O tubo do aspirador, através do qual a força é aplicada, faz um ângulo de 35° com o tapete. O aspirador é deslocado 2,8 m para a direita.

Qual foi o trabalho realizado pela força aplicada pela pessoa?

Resposta:

O trabalho realizado por uma força constante que faz um ângulo θ com o deslocamento d é

$$W = F d \cos \theta,$$

onde F é a intensidade da força.

Dados: $F = 45 \text{ N}$, $d = 2,8 \text{ m}$, $\theta = 35^\circ$.

Substituindo:

$$W = 45 \times 2,8 \times \cos 35^\circ.$$

Calculamos $\cos 35^\circ \approx 0,819$:

$$W \approx 45 \times 2,8 \times 0,819 \approx 103 \text{ J} \quad (3 \text{ algarismos significativos}).$$

Resposta: $W \approx 1,03 \times 10^2 \text{ J}$.

Problema 4 — Trabalho contra a gravidade e deslocamento horizontal

Uma pessoa levanta um calhau de massa m até uma altura h acima do solo e depois caminha uma distância horizontal d mantendo o calhau sempre à mesma altura h .

Qual é o trabalho realizado:

- a) pela pessoa (na direcção vertical e na direcção horizontal)?
- b) pela força gravítica?

Justifica cuidadosamente as respostas.

Resposta:

a) Trabalho realizado pela pessoa

Subida vertical: para levantar o calhau a uma altura h com velocidade final nula, a pessoa tem de aplicar, em média, uma força para cima de módulo igual ao peso mg . O deslocamento é vertical para cima, de módulo h , na mesma direcção e sentido da força.

O trabalho na subida é:

$$W_{\text{pessoa, vert}} = F h = (mg) h = mgh.$$

Deslocamento horizontal: ao caminhar com o calhau à altura constante h , admitimos que: não há variação de energia cinética do calhau (velocidade constante);

a força exercida pela pessoa sobre o calhau é vertical (para o segurar), enquanto o deslocamento é horizontal.

Logo, o ângulo entre força (vertical) e deslocamento (horizontal) é 90° , pelo que

$$W_{\text{pessoa, horiz}} = F d \cos 90^\circ = 0.$$

b) Trabalho da força gravítica

A força gravítica (peso) é vertical e para baixo, de módulo mg .

Na subida: o deslocamento é vertical para cima, de módulo h , mas *oposto* ao peso. O trabalho da gravidade é:

$$W_{\text{grav}} = -mgh.$$

No deslocamento horizontal: a gravidade é vertical, o deslocamento é horizontal, ângulo 90° , pelo que

$$W_{\text{grav, horiz}} = 0.$$

Resumo:

$W_{\text{pessoa}} = mgh$ (vertical), 0 (horizontal); $W_{\text{gravidade}} = -mgh$ (vertical), 0 (horizontal).

Problema 5 — Energia num sistema bloco-mola sem atrito

Um bloco de 0,40 kg está ligado a uma mola horizontal num carrinho de ar, sobre uma superfície sem atrito. A partir da posição de equilíbrio, o bloco é puxado 0,060 m para a direita. Nessa posição, a mola exerce sobre o bloco uma força $F_m = -9,0 \text{ N}$ (para a esquerda), que pode ser descrita por

$$F_m = -kx.$$

- a) Determina a constante da mola k .
- b) Calcula a rapidez do bloco ao passar pela posição de equilíbrio depois de ser largado a partir do repouso nessa posição deslocada. $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2$ é a energia potencial elástica da mola para uma deformação x em relação à posição de equilíbrio. Num sistema sem atrito, ao passar pela posição de equilíbrio, essa energia transformou-se inteiramente em energia cinética, pelo que $K = \frac{1}{2}mv^2$ e $E_{\text{el}} = 0$.

Resposta:

a) Constante da mola

Pela lei de Hooke:

$$F_m = -kx.$$

Na posição deslocada:

$$F_m = -9,0 \text{ N}, \quad x = +0,060 \text{ m}.$$

Então:

$$-9,0 = -k(0,060) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{9,0}{0,060} = 150 \text{ N/m}.$$

b) Rapidez ao passar pela posição de equilíbrio

Na posição de maior deformação, toda a energia mecânica está na forma de energia potencial elástica:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2.$$

Ao passar pelo equilíbrio, $x = 0$, a energia é puramente cinética:

$$E_{\text{final}} = K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad kx^2 = mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = x\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Substituindo:

$$v = 0,060 \sqrt{\frac{150}{0,40}} = 0,060 \sqrt{375} \approx 0,060 \times 19,4 \approx 1,16 \text{ m/s}.$$

Resposta: $k = 150 \text{ N/m}$, $v \approx 1,16 \text{ m/s}$.

Problema 6 — Teorema trabalho-energia (força constante)

Um carrinho de laboratório de massa 1,8 kg encontra-se inicialmente em repouso sobre uma pista horizontal. Um aluno aplica ao carrinho uma força constante na direcção do movimento, fazendo com que ele se desloque 2,5 m. O trabalho total realizado sobre o carrinho durante esse deslocamento é 15 J.

Usando o teorema trabalho-energia (o trabalho total realizado sobre um corpo é igual à variação da sua energia cinética), determina a rapidez do carrinho no fim dos 2,5 m de deslocamento.

Resposta:

Dados: $m = 1,8 \text{ kg}$, $W_{\text{total}} = 15 \text{ J}$, velocidade inicial $v_i = 0$.

Teorema trabalho-energia:

$$W_{\text{total}} = \Delta K = K_f - K_i.$$

Como o carrinho parte do repouso, $K_i = 0$. Logo:

$$15 = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2 \times 15}{1,8} = \frac{30}{1,8} \approx 16,7.$$

$$v_f \approx \sqrt{16,7} \approx 4,08 \text{ m/s}.$$

Resposta: $v_f \approx 4,08 \text{ m/s}$.

Problema 7 — Perda de energia cinética por fricção

Um bloco de 1,8 kg desliza sobre uma mesa horizontal. Entra numa região rugosa onde passa a estar sujeito apenas a uma força de fricção cinética de intensidade constante $f = 2,5 \text{ N}$, oposta ao movimento. No instante em que entra na região rugosa, a sua rapidez é $v_i = 3,6 \text{ m/s}$.

Admitindo que, nesse trecho, a única força com componente na direcção do movimento é a força de fricção, usa a relação

$$\Delta K = -f s$$

para determinar a distância s que o bloco percorre desde que entra na região rugosa até parar completamente.

Resposta:

Dados: $m = 1,8 \text{ kg}$, $v_i = 3,6 \text{ m/s}$, $v_f = 0$, $f = 2,5 \text{ N}$.

Energia cinética inicial:

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 1,8 \times 3,6^2.$$

Calculamos:

$$3,6^2 = 12,96, \quad K_i = 0,9 \times 12,96 \approx 11,7 \text{ J}.$$

No fim do movimento, o bloco pára, logo $K_f = 0$. A variação da energia cinética é:

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - K_i = -K_i.$$

Pela relação dada:

$$\Delta K = -f s \quad \Rightarrow \quad -K_i = -f s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{K_i}{f}.$$

$$s \approx \frac{11,7}{2,5} \approx 4,67 \text{ m}.$$

Resposta: $s \approx 4,67 \text{ m}$.

Problema 8 — Potência e energia em aparelhos eléctricos

Uma lâmpada incandescente tem a potência de 60 W.

Explica, com uma frase, o que significa, em termos de potência, dizer que a lâmpada é de 60 W.

Calcula o trabalho (energia transformada) pela lâmpada se ficar acesa durante 2,0 h.

- a) Começa por escrever a expressão da potência instantânea: $P = \frac{dW}{dt}$. Admitindo que a potência é constante, reescreve-a como $P = \frac{W}{t}$.
- b) A partir dessa expressão, obtém uma fórmula para o trabalho W em função de P e t .
- c) Usa $P = 60 \text{ W}$ e $t = 2,0 \text{ h}$ (não te esqueças de converter para segundos) para calcular W em joule (J). Escreve o resultado anterior em quilowatt-hora (kWh).
- d) Indica, justificando, qual das seguintes grandezas é unidade de potência e qual é unidade de energia:
- 1) W
 - 2) kWh
- e) Um secador de cabelo tem potência de 1,8 kW e funciona durante 8,0 min.
- 1) Calcula a energia transformada pelo secador em joule (J).
 - 2) Calcula a mesma energia em kWh.

Apresenta todos os resultados com três algarismos significativos.

Resposta:

Significado de 60 W: a lâmpada transforma energia a uma taxa de 60 J por segundo (potência é energia por unidade de tempo).

a) Potência instantânea:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Se P é constante, a energia transformada em um intervalo de tempo t é:

$$W = P t \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{W}{t}.$$

b) Já obtido: $W = P t$.

c) Lâmpada de 60 W durante 2,0 h.

Converter o tempo para segundos:

$$t = 2,0 \text{ h} = 2,0 \times 3600 \text{ s} = 7200 \text{ s}.$$

Energia em joule:

$$W = P t = 60 \times 7200 = 432\,000 \text{ J} = 4,32 \times 10^5 \text{ J}.$$

Para converter em kWh, usamos:

$$1 \text{ kWh} = (1000 \text{ W}) \times (3600 \text{ s}) = 3,6 \times 10^6 \text{ J}.$$

Logo:

$$W = \frac{4,32 \times 10^5}{3,6 \times 10^6} \approx 0,120 \text{ kWh}.$$

d)

W (watt) é unidade de **potência** (J/s).

kWh (quilowatt-hora) é unidade de **energia**, pois corresponde a potência $\times$ tempo.

e) Secador de cabelo: $P = 1,8 \text{ kW} = 1800 \text{ W}$, $t = 8,0 \text{ min}$.

Converter o tempo:

$$t = 8,0 \text{ min} = 8,0 \times 60 \text{ s} = 480 \text{ s}.$$

Energia em J:

$$W = P t = 1800 \times 480 = 864\,000 \text{ J} = 8,64 \times 10^5 \text{ J}.$$

Em kWh:

$$P = 1,8 \text{ kW}, \quad t = \frac{8,0}{60} \text{ h} \approx 0,133 \text{ h}.$$

$$W = 1,8 \times 0,133 \approx 0,240 \text{ kWh}.$$

Respostas (3 algarismos):

$$W_{\text{lâmpada}} \approx 4,32 \times 10^5 \text{ J} \approx 0,120 \text{ kWh},$$

$$W_{\text{secador}} \approx 8,64 \times 10^5 \text{ J} \approx 0,240 \text{ kWh}.$$

Problema 9 — Recuo de uma máquina de disparo

Uma máquina dispara bolas com uma massa de 0,20 kg a uma velocidade de $30 \hat{\mathbf{i}}$ m/s. Se a máquina tiver uma massa de 40 kg, qual será a velocidade de recuo da máquina após disparar uma bola, considerando que a máquina poderá deslizar sem atrito na superfície onde está?

Resposta:

Ideia-chave: Se não há forças externas horizontais, o momento linear total na direcção horizontal conserva-se.

Antes do disparo:

bola em repouso: $\vec{p}_{\text{bola, i}} = \vec{0}$;

máquina em repouso: $\vec{p}_{\text{maq, i}} = \vec{0}$.

Logo, o momento total inicial é:

$$\vec{p}_{\text{tot, i}} = \vec{0}.$$

Depois do disparo:

bola: massa $m = 0,20$ kg, velocidade $\vec{v}_b = 30 \hat{\mathbf{i}}$ m/s;

máquina: massa $M = 40$ kg, velocidade $\vec{v}_M = v_M \hat{\mathbf{i}}$ (desconhecida).

Os momentos são:

$$\vec{p}_b = m\vec{v}_b = 0,20 \times 30 \hat{\mathbf{i}} = 6,0 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$\vec{p}_M = M\vec{v}_M = 40 v_M \hat{\mathbf{i}}.$$

Conservação do momento linear:

$$\vec{p}_{\text{tot, f}} = \vec{p}_{\text{tot, i}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_b + \vec{p}_M = \vec{0}.$$

Na direcção de $\hat{\mathbf{i}}$:

$$6,0 + 40v_M = 0 \quad \Rightarrow \quad v_M = -\frac{6,0}{40} = -0,15 \text{ m/s}.$$

O sinal negativo indica que a máquina recua no sentido oposto ao disparo da bola.

Resposta: a velocidade de recuo é

$$\vec{v}_M = -0,15 \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}.$$

Problema 10 — Impulso e força média numa colisão

Um automóvel de 1.300 kg colide com uma parede. As velocidades inicial e final do automóvel foram $\vec{v}_i = -18,0 \hat{i} \text{ m/s}$ e $\vec{v}_f = 1,20 \hat{i} \text{ m/s}$. Se a colisão tiver durado 0,180 s, qual foi o impulso causado pela colisão e qual a força média exercida no automóvel?

Resposta:

Dados: $m = 1300 \text{ kg}$; $\vec{v}_i = -18,0 \hat{i} \text{ m/s}$; $\vec{v}_f = 1,20 \hat{i} \text{ m/s}$; $\Delta t = 0,180 \text{ s}$.

Impulso $\vec{J}$ é a variação do momento linear:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i).$$

Calculamos $\vec{v}_f - \vec{v}_i$:

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = 1,20 \hat{i} - (-18,0 \hat{i}) = (1,20 + 18,0) \hat{i} = 19,2 \hat{i} \text{ m/s}.$$

Logo:

$$\vec{J} = 1300 \times 19,2 \hat{i} = 24\,960 \hat{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Em notação científica:

$$\vec{J} \approx 2,50 \times 10^4 \hat{i} \text{ N}\cdot\text{s}.$$

Força média $\vec{F}_{\text{média}}$:

Relação impulso–força média:

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{média}} \Delta t \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{média}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}.$$

$$\vec{F}_{\text{média}} = \frac{24\,960}{0,180} \hat{i} \approx 138\,667 \hat{i} \text{ N} \approx 1,39 \times 10^5 \hat{i} \text{ N}.$$

Respostas (3 algarismos):

$$\vec{J} \approx 2,50 \times 10^4 \hat{i} \text{ N}\cdot\text{s}, \quad \vec{F}_{\text{média}} \approx 1,39 \times 10^5 \hat{i} \text{ N}.$$

Problema 11 — Dois blocos e mola em colisão

Um bloco de massa $m_1 = 1,50 \text{ kg}$ move-se para a direita com uma rapidez $v_{1i} = 3,80 \text{ m/s}$ numa pista horizontal sem atrito. Este bloco colide com uma mola ligada a outro bloco com massa $m_2 = 2,40 \text{ kg}$ que se movia para a esquerda com uma velocidade $v_{2i} = 2,00 \text{ m/s}$. A mola tem uma constante $k = 500 \text{ N/m}$.

- a) No instante em que m_1 se move com uma rapidez de $2,00 \text{ m/s}$ para a direita, qual é a rapidez de m_2 e em que sentido se move?
- b) Que distância foi a mola comprimida nesse momento?

Resposta:

Convenção: eixo x horizontal, sentido positivo para a direita.

Dados:

$$\begin{aligned}m_1 &= 1,50 \text{ kg}, & v_{1i} &= +3,80 \text{ m/s}, \\m_2 &= 2,40 \text{ kg}, & v_{2i} &= -2,00 \text{ m/s}, \\k &= 500 \text{ N/m}.\end{aligned}$$

No instante considerado, a rapidez de m_1 é $v_1 = +2,00 \text{ m/s}$; a velocidade de m_2 é v_2 (a determinar) e a mola está comprimida de uma quantidade x .

a) Velocidade de m_2 nesse instante

Como não há forças externas horizontais, o momento linear total em x conserva-se.

Momento inicial:

$$p_{\text{inicial}} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = 1,50 \times 3,80 + 2,40 \times (-2,00).$$

$$1,50 \times 3,80 = 5,70, \quad 2,40 \times (-2,00) = -4,80.$$

$$p_{\text{inicial}} = 5,70 - 4,80 = 0,90 \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

No instante em questão:

$$p_{\text{final}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 1,50 \times 2,00 + 2,40 v_2.$$

$$p_{\text{final}} = 3,00 + 2,40 v_2.$$

Conservação do momento:

$$p_{\text{final}} = p_{\text{inicial}} \quad \Rightarrow \quad 3,00 + 2,40 v_2 = 0,90.$$

$$2,40 v_2 = 0,90 - 3,00 = -2,10 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{-2,10}{2,40} \approx -0,875 \text{ m/s}.$$

O sinal negativo indica que m_2 se move para a *esquerda*. A rapidez é

$$|v_2| \approx 0,875 \text{ m/s}.$$

b) Compressão da mola nesse instante

Conserva-se também a energia mecânica total (sem atrito):

$$E = K_1 + K_2 + E_{\text{el}}.$$

Antes do contacto (mola não comprimida, energia elástica nula):

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2.$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \times 1,50 \times 3,80^2 = 0,75 \times 14,44 \approx 10,8 \text{ J},$$

$$\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2} \times 2,40 \times 2,00^2 = 1,20 \times 4,00 = 4,80 \text{ J}.$$

$$E_{\text{inicial}} \approx 10,8 + 4,80 = 15,6 \text{ J}.$$

No instante considerado:

$$E_{\text{final}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2} \times 1,50 \times 2,00^2 = 0,75 \times 4,00 = 3,00 \text{ J}.$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \times 2,40 \times (0,875)^2 = 1,20 \times 0,766 \approx 0,919 \text{ J}.$$

$$E_{\text{final}} = 3,00 + 0,919 + \frac{1}{2}kx^2 \approx 3,92 + \frac{1}{2} \times 500 x^2.$$

Conservação da energia:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad \Rightarrow \quad 15,6 \approx 3,92 + 250x^2.$$

$$250x^2 \approx 15,6 - 3,92 = 11,7 \quad \Rightarrow \quad x^2 \approx \frac{11,7}{250} \approx 0,0468.$$

$$x \approx \sqrt{0,0468} \approx 0,216 \text{ m}.$$

Respostas:

$$v_2 \approx -0,875 \text{ m/s (para a esquerda)}, \quad x \approx 0,216 \text{ m}.$$

Problema 12 — Explosão de um foguetão: conservação do momento linear

Um foguetão de massa M desloca-se verticalmente para cima com uma rapidez de 320 m/s. Quando chega a uma altitude de 1.200 m explode em três fragmentos e o seu motor deixa de funcionar. As forças explosivas são internas ao sistema. Os fragmentos têm todos a mesma massa: $M/3$.

O fragmento I continua em ascensão vertical com uma rapidez de 460 m/s; o fragmento II desloca-se horizontalmente para Este com uma rapidez de 260 m/s; e o fragmento III tem uma velocidade desconhecida.

- Qual é o vector velocidade do fragmento III imediatamente a seguir à explosão? (Indica os componentes vertical e horizontal.)
- Qual é a rapidez do fragmento III imediatamente a seguir à explosão?
- Qual é a posição do centro de massa do sistema em relação ao chão 3,0 s após a explosão? (Admite que, depois da explosão, apenas a gravidade actua sobre os fragmentos.)

Resposta:

Adoptamos um referencial cartesiano com:

eixo x : horizontal, positivo para Este ($\hat{i}$);

eixo y : vertical, positivo para cima ($\hat{j}$).

Velocidade do foguetão antes da explosão:

$$\vec{v}_0 = 0 \hat{i} + 320 \hat{j} \text{ m/s.}$$

a) Vector velocidade do fragmento III

Antes da explosão, o momento total é:

$$\vec{p}_{\text{inicial}} = M\vec{v}_0.$$

Depois da explosão, cada fragmento tem massa $M/3$. Se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ forem as velocidades dos fragmentos I, II e III, então:

$$\vec{p}_{\text{final}} = \frac{M}{3}\vec{v}_1 + \frac{M}{3}\vec{v}_2 + \frac{M}{3}\vec{v}_3.$$

Como as forças explosivas são internas, o momento total conserva-se:

$$\vec{p}_{\text{final}} = \vec{p}_{\text{inicial}} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{3}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = M\vec{v}_0.$$

Dividindo por $M/3$:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 3\vec{v}_0.$$

As velocidades dadas:

$$\vec{v}_1 = 0 \hat{i} + 460 \hat{j}, \quad \vec{v}_2 = 260 \hat{i} + 0 \hat{j}, \quad \vec{v}_0 = 0 \hat{i} + 320 \hat{j}.$$

Então:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 3(0\hat{i} + 320\hat{j}) = 0\hat{i} + 960\hat{j}.$$

Separando componentes:

Componente em $\hat{i}$:

$$(0 + 260 + v_{3x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{3x} = -260 \text{ m/s}.$$

Componente em $\hat{j}$:

$$(460 + 0 + v_{3y}) = 960 \quad \Rightarrow \quad v_{3y} = 500 \text{ m/s}.$$

Logo:

$$\vec{v}_3 = -260\hat{i} + 500\hat{j} \text{ m/s}.$$

b) Rapidez do fragmento III

A rapidez é o módulo do vector velocidade:

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{(-260)^2 + 500^2} = \sqrt{67\,600 + 250\,000} = \sqrt{317\,600} \approx 564 \text{ m/s}.$$

c) Posição do centro de massa após 3,0 s

Após a explosão, só actua a gravidade (força externa vertical). O movimento do *centro de massa* é o mesmo que teria o foguetão de massa M se não tivesse explodido: movimento rectilíneo vertical sob aceleração constante g .

Dados no instante da explosão ($t = 0$):

$$y_0 = 1200 \text{ m}, \quad v_{y0} = 320 \text{ m/s}, \quad a_y = -g \approx -9,8 \text{ m/s}^2.$$

Equação da posição vertical do centro de massa ao fim de $t = 3,0$ s:

$$y_{\text{CM}}(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

$$y_{\text{CM}}(3,0) = 1200 + 320 \times 3,0 - \frac{1}{2} \times 9,8 \times (3,0)^2.$$

$$320 \times 3,0 = 960, \quad (3,0)^2 = 9, \quad \frac{1}{2} \times 9,8 \times 9 = 4,9 \times 9 = 44,1.$$

$$y_{\text{CM}}(3,0) = 1200 + 960 - 44,1 = 2115,9 \text{ m}.$$

Horizontalmente, não há forças externas; a posição inicial do centro de massa em x é $x_0 = 0$ e a velocidade horizontal do conjunto é nula, logo $x_{\text{CM}}(t) = 0$.

Posição do CM em vector:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(3,0) = 0\hat{i} + 2,12 \times 10^3\hat{j} \text{ m (aproximadamente)}.$$

Resumos:

$$\vec{v}_3 = -260\,\hat{\mathbf{i}} + 500\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}, \quad v_3 \approx 5,64 \times 10^2\,\text{m/s},$$

$$\vec{r}_{\text{CM}}(3,0) \approx 0\,\hat{\mathbf{i}} + 2,12 \times 10^3\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m}.$$

Problema 13 — Foguetão e equação do foguetão

Um foguetão no espaço tem uma rapidez inicial de $v_0 = 2,8 \times 10^3 \text{ m/s}$ em relação à Terra. Com os motores ligados, o foguetão ejecta combustível com uma rapidez de $v_e = 4,5 \times 10^3 \text{ m/s}$ na direcção oposta à do movimento do foguetão (rapidez de ejeção em relação ao foguetão).

- a) Qual é a rapidez do foguetão em relação à Terra quando a sua massa for um terço da sua massa inicial? (Sugestão: admite que não há forças externas relevantes e usa a forma apropriada da equação do foguetão.)
- b) Qual será o seu empuxo se queimar combustível com uma taxa de 45 kg/s ?

Resposta:

a) Rapidez final usando a equação do foguetão

Sem forças externas, a equação (de Tsiolkovski) é:

$$\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m},$$

onde:

v_e é a rapidez de ejeção (em relação ao foguetão);

m_0 é a massa inicial;

m é a massa final.

Diz-se que a massa final é $m = \frac{m_0}{3}$. Logo:

$$\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m_0/3} = v_e \ln 3.$$

A rapidez final em relação à Terra é:

$$v_f = v_0 + \Delta v = v_0 + v_e \ln 3.$$

Substituindo:

$$v_f = 2,8 \times 10^3 + 4,5 \times 10^3 \ln 3.$$

$\ln 3 \approx 1,10$, logo:

$$\Delta v \approx 4,5 \times 10^3 \times 1,10 \approx 4,94 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

$$v_f \approx 2,8 \times 10^3 + 4,94 \times 10^3 \approx 7,74 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

b) Empuxo do foguetão

O empuxo F é dado por:

$$F = \dot{m} v_e,$$

onde $\dot{m}$ é a taxa de variação da massa de combustível (módulo, em kg/s) e v_e a rapidez de ejeção.

$$\dot{m} = 45 \text{ kg/s}, \quad v_e = 4,5 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

$$F = 45 \times 4,5 \times 10^3 = 202\,500 \text{ N} \approx 2,03 \times 10^5 \text{ N}.$$

Respostas (3 algarismos):

$$v_f \approx 7,74 \times 10^3 \text{ m/s}, \quad F \approx 2,03 \times 10^5 \text{ N}.$$