



Física 12.º ano

Terceiro Teste — a conquista do espaço

versão: 1,0

José Pedro do Amaral

19 de maio de 2026

Instruções

Em todos os problemas, justifica com equações e unidades.

Considera que os acontecimentos dos Problemas 1 a 5 ocorrem sequencialmente no tempo (a nave é sempre a mesma).

Quando necessário, despreza efeitos relativistas, rotação dos corpos e atrito.

Contexto geral: nave *CST–Astra*

A nave *CST–Astra* é concebida com:

$$m_{\text{seca}} = 22.000 \text{ kg}, \quad m_{\text{comb},0} = 53.000 \text{ kg}, \quad m_0 = m_{\text{seca}} + m_{\text{comb},0} = 75.000 \text{ kg}.$$

No Problema 2, a nave usa um motor com *velocidade efectiva de exaustão*

$$u = 4.200 \text{ m/s},$$

e realiza a manobra durante

$$\Delta t = 720 \text{ s}.$$

Dados

(Usa estes valores, mesmo que conheças aproximações diferentes.)

Parâmetro gravitacional da Terra	$\mu_{\oplus} = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Raio médio da Terra	$R_{\oplus} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$
Altitude da órbita inicial	$h = 500 \times 10^3 \text{ m}$
1 unidade astronómica	$1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$
Raio médio da órbita de Plutão	$R_P = 39,5 \text{ UA}$
Raio médio da órbita de Arrokoth	$R_A = 44,2 \text{ UA}$

Problemas

1. Velocidade de fuga (a partir de órbita circular).

A nave encontra-se inicialmente em órbita circular em torno da Terra, a altitude $h = 500$ km.

- a) Calcula a velocidade de fuga v_{fuga} no raio $r = R_{\oplus} + h$.
- b) Calcula a velocidade orbital circular v_{orb} no mesmo raio.
- c) Determina o incremento mínimo de velocidade (impulso instantâneo) necessário para passar de órbita circular para trajectória parabólica (fuga): $\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}}$.

Resposta:

a) A velocidade de fuga a um raio r obtém-se de $\frac{1}{2}v^2 = \mu/r$:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r}}, \quad r = R_{\oplus} + h = 6,371 \times 10^6 \text{ m} + 0,500 \times 10^6 \text{ m} = 6,871 \times 10^6 \text{ m}.$$

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,986 \times 10^{14}}{6,871 \times 10^6}} = \sqrt{1,1602 \times 10^8} \approx 1,077 \times 10^4 \text{ m/s} \approx 10,77 \text{ km/s}.$$

b) Para órbita circular, a aceleração gravítica fornece a centrípeta: $v_{\text{orb}} = \sqrt{\mu_{\oplus}/r} = v_{\text{fuga}}/\sqrt{2}$.

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{3,986 \times 10^{14}}{6,871 \times 10^6}} = \sqrt{5,801 \times 10^7} \approx 7,616 \times 10^3 \text{ m/s} \approx 7,62 \text{ km/s}.$$

c) Incremento mínimo de velocidade (impulso tangencial):

$$\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}} = (\sqrt{2} - 1) v_{\text{orb}} \approx 3,155 \times 10^3 \text{ m/s} \approx 3,16 \text{ km/s}.$$

2. Empuxo (thrust) do motor e consumo de combustível.

A nave realiza a manobra de fuga do Problema 1 com um motor de velocidade efectiva de exaustão $u = 4.200 \text{ m/s}$ durante $\Delta t = 720 \text{ s}$.

- a) Usando a equação de Tsiolkovsky, $\Delta v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$, calcula a massa final m_1 após a manobra.
- b) Calcula a massa de propelente consumida, $m_{\text{comb,cons}} = m_0 - m_1$, e a massa de combustível restante.
- c) Calcula a taxa média de escoamento de massa $\dot{m}$ e o empuxo médio $F = \dot{m} u$ (despreza o termo de pressão).

Resposta:

a) De $\Delta v = u \ln(m_0/m_1)$ vem $m_1 = m_0 e^{-\Delta v/u}$:

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{3155}{4200} = 0,7512, \quad e^{0,7512} = 2,120.$$

$$m_1 = \frac{75\,000}{2,120} \approx 3,539 \times 10^4 \text{ kg} \quad (\approx 35.386 \text{ kg}).$$

b) Massa de propelente consumida e restante:

$$m_{\text{comb,cons}} = m_0 - m_1 \approx 75\,000 - 35\,386 = 39.614 \text{ kg} \approx 3,96 \times 10^4 \text{ kg},$$

$$m_{\text{comb,rest}} = m_{\text{comb},0} - m_{\text{comb,cons}} = 53\,000 - 39\,614 = 13.386 \text{ kg} \approx 1,34 \times 10^4 \text{ kg}.$$

c) Taxa média de escoamento de massa e empuxo médio (desprezando o termo de pressão):

$$\dot{m} = \frac{m_{\text{comb,cons}}}{\Delta t} = \frac{39\,614}{720} \approx 55,02 \text{ kg/s},$$

$$F = \dot{m} u \approx 55,02 \times 4200 \approx 2,31 \times 10^5 \text{ N} \approx 231 \text{ kN}.$$

3. Rota para intersectar uma estação espacial com trajectória linear $y = mx + b$.

Após a manobra do Problema 2, considera um referencial inercial 2D em que, no instante $t = 0$:

$$\vec{r}_{\text{nave}}(0) = (0, 0) \text{ km.}$$

A nave segue em linha recta com rapidez constante $v = 5,0 \text{ km/s}$.

A estação espacial move-se ao longo da recta

$$y = mx + b \quad \text{com} \quad m = 1,20, \quad b = 150.000 \text{ km,}$$

no sentido de x crescente, com rapidez constante $v_E = 2,5 \text{ km/s}$. No instante $t = 0$ a estação está em $x_0 = 800.000 \text{ km}$ (logo $y_0 = mx_0 + b$).

- Escreve as equações paramétricas $\vec{r}_E(t)$ da estação (componentes $x(t)$ e $y(t)$).
- Determina o instante t_* em que a nave pode interceptar a estação.
- Determina o ponto de intercepção (x_*, y_*) e o ângulo θ (em relação ao eixo x) da trajectória da nave.

Resposta:

a) O versor da recta no sentido de x crescente é $\hat{u} = (1, m)/\sqrt{1 + m^2} = (1; 1,20)/\sqrt{2,44}$, com $\sqrt{2,44} \approx 1,5620$. Assim,

$$v_{Ex} = \frac{v_E}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{2,5}{1,5620} \approx 1,6005 \text{ km/s}, \quad v_{Ey} = m v_{Ex} \approx 1,9206 \text{ km/s}.$$

Com $y_0 = mx_0 + b = 1,20 \cdot 800\,000 + 150\,000 = 1,110 \times 10^6 \text{ km}$, vem

$$\begin{aligned} x_E(t) &= 8,000 \times 10^5 + 1,6005 t \quad [\text{km}], \\ y_E(t) &= 1,110 \times 10^6 + 1,9206 t \quad [\text{km}], \end{aligned} \quad t \text{ em s.}$$

b) Como a nave parte de $(0, 0)$ com rapidez $v = 5 \text{ km/s}$, intercepta a estação quando $|\vec{r}_E(t_*)| = v t_*$, isto é, $|\vec{r}_E(t)|^2 = (5t)^2$:

$$(8,000 \times 10^5 + 1,6005 t)^2 + (1,110 \times 10^6 + 1,9206 t)^2 = 25 t^2.$$

Expandindo (em km^2 e km^2/s^2):

$$6,24998 t^2 + 6,82434 \times 10^6 t + 1,8721 \times 10^{12} = 25 t^2,$$

$$18,7500 t^2 - 6,82434 \times 10^6 t - 1,8721 \times 10^{12} = 0.$$

Discriminante e raiz positiva:

$$\Delta_q = (6,82434 \times 10^6)^2 + 4(18,7500)(1,8721 \times 10^{12}) \approx 1,8698 \times 10^{14},$$

$$t_* = \frac{6,82434 \times 10^6 + \sqrt{1,8698 \times 10^{14}}}{37,500} = \frac{6,82434 \times 10^6 + 1,36740 \times 10^7}{37,500} \approx 5,466 \times 10^5 \text{ s} \approx 6,33 \text{ dias.}$$

c) Ponto de intercepção:

$$x_* = 8,000 \times 10^5 + 1,6005 \cdot 5,466 \times 10^5 \approx 1,674.8 \times 10^6 \text{ km,}$$

$$y_* = 1,110 \times 10^6 + 1,9206 \cdot 5,466 \times 10^5 \approx 2,159.7 \times 10^6 \text{ km.}$$

Verificação: $\sqrt{x_*^2 + y_*^2} \approx 2,733 \times 10^6 \text{ km} = v t_*. \checkmark$

Ângulo da trajectória da nave (que parte da origem):

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_*}{x_*}\right) = \arctan(1,290) \approx 52,2^\circ.$$

4. Tempo para intersectar a órbita de Plutão (modelo linear).

A partir daqui, muda-se para um referencial heliocêntrico 2D com o Sol na origem. Para simplificar, considera que o encontro do Problema 3 ocorreu quando a nave estava na posição heliocêntrica:

$$\vec{r}_0 = (1,00 \text{ UA}, 0) \quad \text{isto é} \quad \vec{r}_0 = (1,496 \times 10^8 \text{ km}, 0).$$

A nave parte dessa posição com velocidade constante:

$$\vec{v} = (7,0 \text{ km/s}) \hat{i} + (20,0 \text{ km/s}) \hat{j}.$$

A órbita de Plutão é aproximada por um círculo de raio $R_P = 39,5 \text{ UA}$.

- a) Escreve $\vec{r}(t)$.
- b) Determina $t_P > 0$ tal que $|\vec{r}(t_P)| = R_P$.
- c) Apresenta t_P em segundos e em anos (1 ano = 365,25 dias).

Resposta:

a) Movimento rectilíneo uniforme, partindo de $\vec{r}_0 = (1,496 \times 10^8 \text{ km}, 0)$:

$$\vec{r}(t) = (1,496 \times 10^8 + 7,0 t) \hat{i} + (20,0 t) \hat{j} \quad [\text{km}], \quad t \text{ em s.}$$

b) Com $R_P = 39,5 \cdot 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 5,909.2 \times 10^9 \text{ km}$, impomos $|\vec{r}(t_P)|^2 = R_P^2$:

$$(1,496 \times 10^8 + 7,0 t)^2 + (20,0 t)^2 = R_P^2.$$

Expandindo (km, s):

$$449 t^2 + 2,0944 \times 10^9 t + 2,2380 \times 10^{16} = 3,4919 \times 10^{19},$$

$$449 t^2 + 2,0944 \times 10^9 t - 3,4897 \times 10^{19} = 0.$$

Discriminante e raiz positiva:

$$\Delta_q = (2,0944 \times 10^9)^2 + 4(449)(3,4897 \times 10^{19}) \approx 6,2679 \times 10^{22}, \quad \sqrt{\Delta_q} \approx 2,5036 \times 10^{11}.$$

$$t_P = \frac{-2,0944 \times 10^9 + 2,5036 \times 10^{11}}{898} \approx \frac{2,4826 \times 10^{11}}{898} \approx 2,765 \times 10^8 \text{ s.}$$

c) Conversão para anos (1 ano = $365,25 \cdot 86\,400 = 3,155.76 \times 10^7 \text{ s}$):

$$t_P \approx \frac{2,765 \times 10^8}{3,15576 \times 10^7} \approx 8,76 \text{ anos.}$$

A posição da nave nesse instante, que servirá no Problema 5, é

$$\vec{r}_P = \vec{r}(t_P) \approx (2,0848 \times 10^9, 5,5292 \times 10^9) \text{ km} \equiv (13,94, 36,96) \text{ UA}, \quad |\vec{r}_P| \approx R_P. \quad \checkmark$$

5. Trajectória linear pós-Plutão para intersectar Arrokoth.

No instante em que a nave cruza a órbita de Plutão (instante t_P do Problema 4), a sua posição é $\vec{r}_P = \vec{r}(t_P)$. Nesse mesmo instante, supõe que Arrokoth está na posição heliocêntrica (ponto fixo, para simplificar):

$$\vec{r}_A = R_A(\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}), \quad R_A = 44,2 \text{ UA}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Após um *flyby* em Plutão, a nave ajusta instantaneamente a sua velocidade para ter rapidez constante

$$v_2 = 25,0 \text{ km/s}$$

e seguir em linha recta até Arrokoth.

- Calcula $\vec{r}_P$ (componentes em km).
- Determina o versor direcção $\hat{n}$ da trajectória pós-Plutão que leva a nave até Arrokoth.
- Escreve a equação vectorial da trajectória $\vec{r}(t) = \vec{r}_P + v_2 \hat{n} t$.
- Calcula o tempo de voo Δt_A até Arrokoth e a distância percorrida nesse troço.

Resposta:

a) A partir de $t_P \approx 2,765 \times 10^8 \text{ s}$ (Problema 4):

$$x_P = 1,496 \times 10^8 + 7,0 t_P \approx 2,084.8 \times 10^9 \text{ km}, \quad y_P = 20,0 t_P \approx 5,529.2 \times 10^9 \text{ km}.$$

Logo $\vec{r}_P \approx (2,085 \times 10^9, 5,529 \times 10^9) \text{ km}$, com $|\vec{r}_P| \approx 5,909 \times 10^9 \text{ km} = R_P$. ✓

b) Posição de Arrokoth (com $R_A = 44,2 \cdot 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 6,612.3 \times 10^9 \text{ km}$ e $\varphi = 60^\circ$):

$$\vec{r}_A = R_A(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) \approx (3,3062 \times 10^9, 5,7264 \times 10^9) \text{ km}.$$

Vector deslocamento e versor:

$$\vec{d} = \vec{r}_A - \vec{r}_P \approx (1,2213 \times 10^9, 1,972 \times 10^8) \text{ km},$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(1,2213)^2 + (0,1972)^2} \times 10^9 = \sqrt{1,5306} \times 10^9 \approx 1,237.2 \times 10^9 \text{ km} (\approx 8,27 \text{ UA}),$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \approx (0,9872, 0,1594).$$

c) Trajectória pós-Plutão (com $v_2 = 25 \text{ km/s}$ e t medido a partir do *flyby*):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_P + v_2 \hat{n} t = (2,085 \times 10^9 + 24,68 t) \hat{i} + (5,529 \times 10^9 + 3,985 t) \hat{j} \quad [\text{km}].$$

d) Tempo de voo e distância percorrida:

$$\Delta t_A = \frac{|\vec{d}|}{v_2} = \frac{1,2372 \times 10^9}{25} \approx 4,949 \times 10^7 \text{ s} \approx 1,57 \text{ anos},$$

$$\text{distância percorrida} = |\vec{d}| \approx 1,24 \times 10^9 \text{ km} (\approx 8,27 \text{ UA}).$$