



Física 12.º ano

Terceiro Teste — a conquista do espaço

(versão com respostas)

Versão: 1,1

José Pedro do Amaral

3 de fevereiro de 2026

Nome / Turma / Data:

Instruções

Lê com atenção, responde com *rigor* e apresenta *todas* as etapas de raciocínio. Quando aplicável, usa unidades SI. Este teste está cotado para $\frac{100}{100}$. O teste deverá ser entregue dia 12/01/2026 durante a aula.

Em todos os problemas, justifica com equações e unidades.

Considera que os acontecimentos dos Problemas 1 a 5 ocorrem sequencialmente no tempo (a nave é sempre a mesma).

Quando necessário, despreza efeitos relativistas, rotação dos corpos e atrito.

Nos Problemas 4 e 5, usa o modelo de trajectória rectilínea uniforme (MRU) no referencial heliocêntrico.

Nave espacial *CST-Astra*

A nave espacial *CST-Astra* tem:

$$m_{\text{seca}} = 12.000 \text{ kg}, \quad m_{\text{comb},0} = 8.000 \text{ kg}, \quad m_0 = 20.000 \text{ kg}.$$

No Problema 2, supõe-se que a massa da nave é aproximadamente constante durante a manobra.

Dados

Parâmetro gravitacional da Terra	$\mu_{\oplus} = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Raio médio da Terra	$R_{\oplus} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$
Altitude da órbita inicial	$h = 200 \times 10^3 \text{ m}$
1 unidade astronômica	$1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$
Raio médio da órbita de Plutão	$R_P = 39,5 \text{ UA}$
Ano	$ano = 365,25 \text{ dias}$

Problemas

1. Velocidade de fuga (a partir de órbita circular). (20 pts.)

Introdução

A interacção gravítica entre um corpo de massa m (a nave) e a Terra (massa $M_{\oplus}$) pode ser descrita usando o **parâmetro gravitacional**:

$$\mu_{\oplus} = GM_{\oplus},$$

onde G é a constante gravítica. Neste teste, $\mu_{\oplus}$ é dado.

A **energia mecânica** (por unidade de massa) de um corpo num campo gravítico (desprezando atritos) é:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r},$$

onde r é a distância ao centro da Terra.

Diz-se que um corpo **escapa** ao campo gravítico (trajetória de fuga) quando, no infinito, a velocidade pode tender para 0 e a energia mecânica total é **nula**:

$$\varepsilon = 0.$$

Ao impor $\varepsilon = 0$, obtém-se a **velocidade de fuga** num raio r :

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r}}.$$

Para uma **órbita circular** de raio r , a força gravítica fornece a aceleração centrípeta:

$$\frac{v_{\text{orb}}^2}{r} = \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r}}.$$

Nota útil: como $v_{\text{fuga}} = \sqrt{2} v_{\text{orb}}$ (no mesmo r), então:

$$\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}} = v_{\text{orb}}(\sqrt{2} - 1).$$

A nave encontra-se inicialmente em órbita circular em torno da Terra, a altitude $h = 200 \text{ km}$.

- a) Calcula o raio orbital $r = R_{\oplus} + h$. (5 pts.)
- b) Calcula a velocidade orbital circular $v_{\text{orb}} = \sqrt{\mu_{\oplus}/r}$. (5 pts.)
- c) Calcula a velocidade de fuga no mesmo raio, $v_{\text{fuga}} = \sqrt{2\mu_{\oplus}/r}$. (5 pts.)
- d) Determina o incremento mínimo de velocidade necessário para passar de órbita circular para trajectória de fuga: (5 pts.)

$$\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}}.$$

Resposta:

a) $r = R_{\oplus} + h = 6,371 \times 10^6 \text{ m} + 2,00 \times 10^5 \text{ m} = 6,571 \times 10^6 \text{ m}.$

b)

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r}} = \sqrt{\frac{3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{6,571 \times 10^6 \text{ m}}} = 7,79 \times 10^3 \text{ m/s} \approx 7,79 \text{ km/s}.$$

c)

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r}} = \sqrt{2} v_{\text{orb}} \approx 1,414 \times 7,79 \text{ km/s} \approx 11,0 \text{ km/s}.$$

d)

$$\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}} \approx 11,0 \text{ km/s} - 7,79 \text{ km/s} = 3,23 \text{ km/s}.$$

2. Empuxo (força de propulsão), impulso e potência média. (20 pts.)

Introdução

A **segunda lei de Newton** diz que a força resultante produz aceleração:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Neste problema, modela-se o empuxo do motor como uma força constante (ou aproximadamente constante) durante um intervalo Δt .

Em movimento rectilíneo (ou ao longo da direcção da velocidade), a aceleração média pode ser calculada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

O **impulso** de uma força constante é definido por:

$$J = F\Delta t,$$

e está ligado à variação do momento linear:

$$J = \Delta p = m\Delta v \quad (\text{se } m \text{ for aproximadamente constante}).$$

Esta relação é muito útil para ligar o tempo de actuação do motor ao incremento de velocidade.

A **energia cinética** de um corpo de massa m e rapidez v é:

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Logo, a variação de energia cinética entre duas rapidez é:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2).$$

A **potência média** associada a uma transferência de energia num intervalo Δt é:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Neste problema, a energia considerada é a variação de energia cinética.

Para obter o Δv do Problema 1, o motor funciona durante $\Delta t = 200$ s, com empuxo aproximadamente constante. Supõe $m \simeq m_0$ durante esta manobra.

- a) Calcula a aceleração média $a = \Delta v / \Delta t$. (5 pts.)
- b) Calcula o empuxo médio $F = ma$. (5 pts.)
- c) Calcula o impulso mecânico $J = F\Delta t$ e confirma que $J = m\Delta v$. (5 pts.)
- d) Calcula a variação de energia cinética da nave: (5 pts.)

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{\text{fuga}}^2 - v_{\text{orb}}^2),$$

e a potência média $P = \Delta K / \Delta t$.

Resposta:

Do Problema 1: $\Delta v = 3,23 \times 10^3$ m/s, $v_{\text{orb}} \approx 7,79 \times 10^3$ m/s, $v_{\text{fuga}} \approx 1,10 \times 10^4$ m/s, e $m = 20.000$ kg.

a)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3,23 \times 10^3 \text{ m/s}}{200 \text{ s}} = 16,1 \text{ m/s}^2.$$

b)

$$F = ma = (20.000 \text{ kg})(16,1 \text{ m/s}^2) = 3,23 \times 10^5 \text{ N} \approx 323 \text{ kN}.$$

c)

$$J = F\Delta t \approx (3,23 \times 10^5 \text{ N})(200 \text{ s}) = 6,46 \times 10^7 \text{ N s}.$$

E:

$$m\Delta v = (20.000 \text{ kg})(3,23 \times 10^3 \text{ m/s}) = 6,46 \times 10^7 \text{ N s}.$$

d)

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{\text{fuga}}^2 - v_{\text{orb}}^2).$$

Como $v_{\text{fuga}}^2 = 2\mu_{\oplus}/r$ e $v_{\text{orb}}^2 = \mu_{\oplus}/r$, então

$$v_{\text{fuga}}^2 - v_{\text{orb}}^2 = \frac{\mu_{\oplus}}{r} = v_{\text{orb}}^2.$$

Logo,

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_{\text{orb}}^2 \approx \frac{1}{2}(20.000 \text{ kg})(7,79 \times 10^3 \text{ m/s})^2 \approx 6,07 \times 10^{11} \text{ J}.$$

$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} \approx \frac{6,07 \times 10^{11} \text{ J}}{200 \text{ s}} = 3,04 \times 10^9 \text{ W} \approx 3,0 \text{ GW}.$$

3. Rota para intersectar uma estação espacial com trajectória linear $y = mx + b$ (MRU em 2D). (20 pts.)

Introdução

O **movimento rectilíneo uniforme (MRU)** em cada eixo é descrito por:

$$x(t) = x_0 + v_x t, \quad y(t) = y_0 + v_y t.$$

Pode-se tratar o movimento em 2D como dois MRU independentes: um em x e outro em y .

Uma trajectória dada por uma recta $y = mx + b$ significa que, para cada posição x , a coordenada y é calculada por essa relação. Se conhecermos $x(t)$, então:

$$y(t) = m x(t) + b.$$

Para uma nave que sai da origem e vai a um ponto (x, y) em linha recta, a **distância** é:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se a nave quiser chegar exactamente nesse ponto ao fim de um tempo t_* , então a rapidez necessária é:

$$v_{\text{nec}} = \frac{d}{t_*}.$$

O **ângulo** da trajectória com o eixo x resulta de trigonometria:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Num referencial inercial 2D, no instante $t = 0$:

$$\vec{r}_{\text{nave}}(0) = (0, 0) \text{ km}.$$

A estação espacial move-se ao longo da recta

$$y = mx + b, \quad m = 0,50, \quad b = 2.000 \text{ km},$$

no sentido de x crescente, com

$$x_E(t) = x_0 + v_x t, \quad x_0 = 1.000 \text{ km}, \quad v_x = 2,0 \text{ km/s}.$$

A nave pretende encontrar a estação ao fim de $t_* = 600 \text{ s}$, seguindo em linha recta desde a origem.

- a) Determina a posição da estação $(x_E(t_*), y_E(t_*))$. (5 pts.)
- b) Calcula a distância da nave até esse ponto. (5 pts.)
- c) Determina a rapidez necessária da nave $v_{\text{nec}} = d/t_*$ e o ângulo θ da sua trajectória com o eixo x . (5 pts.)
- d) Se a nave tiver um limite de rapidez $v_{\text{max}} = 7,0 \text{ km/s}$, calcula se o encontro é possível. (5 pts.)

Resposta:

a)

$$x_E(t_*) = 1.000 \text{ km} + (2,0 \text{ km/s})(600 \text{ s}) = 2.200 \text{ km}.$$

$$y_E(t_*) = mx_E + b = 0,50(2.200 \text{ km}) + 2.000 \text{ km} = 3.100 \text{ km}.$$

b)

$$d = \sqrt{(2.200 \text{ km})^2 + (3.100 \text{ km})^2} \approx 3,80 \times 10^3 \text{ km}.$$

c)

$$v_{\text{nec}} = \frac{3,80 \times 10^3 \text{ km}}{600 \text{ s}} \approx 6,34 \text{ km/s}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{3100}{2200}\right) \approx 54,6^\circ.$$

d) $6,34 \text{ km/s} < 7,0 \text{ km/s}$, logo o encontro é possível.

4. Tempo para intersectar a órbita de Plutão (modelo MRU radial). (20 pts.)

Introdução

Neste modelo trataremos o trajecto exterior como **movimento rectilíneo uniforme (MRU)** ao longo de uma linha (radial, para fora do Sol).

Em MRU, a distância percorrida é:

$$\Delta s = v t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\Delta s}{v}.$$

Aqui, a distância é radial: a nave começa a uma distância r_0 do Sol e quer atingir uma distância R_P . Assim, a distância radial a percorrer é:

$$\Delta r = R_P - r_0.$$

Conversões de unidade:

$$1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}, \quad 1 \text{ ano} = 365,25 \text{ dias}.$$

Ao obteres t em segundos, podes converter para anos dividindo por $3600 \times 24 \times 365,25$.

Após o encontro do Problema 3, considera um referencial heliocêntrico (Sol na origem). No instante inicial do trajecto exterior, a nave está a

$$r_0 = 1,0 \text{ UA}$$

e segue radialmente para fora (linha recta), com rapidez constante

$$v = 15 \text{ km/s.}$$

A órbita de Plutão é aproximada por um círculo de raio $R_P = 39,5 \text{ UA}$.

- a) Calcula a distância radial a percorrer, $\Delta r = R_P - r_0$, em UA e em km. (10 pts.)
- b) Calcula o tempo $t_P = \Delta r/v$ em segundos e em anos. (10 pts.)

Resposta:

a)

$$\Delta r = 39,5 \text{ UA} - 1,0 \text{ UA} = 38,5 \text{ UA} \Rightarrow \Delta r = 38,5 \text{ UA} \times 1,496 \times 10^8 \text{ km/UA} = 5,759.6 \times 10^9 \text{ km.}$$

b)

$$t_P = \frac{5,759.6 \times 10^9 \text{ km}}{15 \text{ km/s}} = 3,84 \times 10^8 \text{ s} \approx 12,2 \text{ anos.}$$

5. Trajectória linear pós-Plutão para intersectar Arrokoth (Pitágoras em UA). (20 pts.)

Introdução

Em coordenadas cartesianas, um ponto tem forma $P = (x_P, y_P)$ e outro ponto $A = (x_A, y_A)$. O **vector deslocamento** de P para A é:

$$\Delta \vec{r} = (x_A - x_P) \hat{i} + (y_A - y_P) \hat{j}.$$

A **distância** entre dois pontos obtém-se pelo teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2}.$$

(Se as coordenadas estiverem em UA, d sai em UA.)

Para converter a distância para km:

$$d(\text{km}) = d(\text{UA}) \times 1,496 \times 10^8 \text{ km/UA.}$$

Se a nave viajar em linha recta com rapidez constante v_2 (MRU), então:

$$\Delta t = \frac{d}{v_2}.$$

O **ângulo** θ da trajectória com o eixo x é dado por:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right),$$

onde $\Delta x = x_A - x_P$ e $\Delta y = y_A - y_P$.

No instante em que a nave atinge a órbita de Plutão (fim do Problema 4), supõe que ela está no ponto

$$P = (39,5 \text{ UA}, 0 \text{ UA}).$$

Nesse mesmo instante, supõe-se (para simplificar) que Arrokoth está no ponto fixo

$$A = (43,5 \text{ UA}, 3,0 \text{ UA}).$$

Após Plutão, a nave segue em linha recta até A , com rapidez constante

$$v_2 = 20 \text{ km/s}.$$

- a) Calcula o vector deslocamento $\Delta \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_P$ em UA. (5 pts.)
- b) Calcula a distância d_{PA} entre P e A em UA (usa Pitágoras) e depois em km. (5 pts.)
- c) Calcula o tempo de viagem $\Delta t_A = d_{PA}/v_2$ em segundos e em anos. (5 pts.)
- d) Determina o ângulo θ da trajectória com o eixo x . (5 pts.)

Resposta:

a)

$$\Delta \vec{r} = (43,5 - 39,5) \hat{i} + (3,0 - 0) \hat{j} = 4 \hat{i} + 3 \hat{j} \text{ (UA)}.$$

b)

$$d_{PA} = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ UA} = 5 \text{ UA} \Rightarrow d_{PA} = 5 \text{ UA} \times 1,496 \times 10^8 \text{ km/UA} = 7,48 \times 10^8 \text{ km}.$$

c)

$$\Delta t_A = \frac{7,48 \times 10^8 \text{ km}}{20 \text{ km/s}} = 3,74 \times 10^7 \text{ s} \approx 1,19 \text{ anos}.$$

d)

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36,9^\circ.$$