

Física 12.º ano

Terceiro Teste — a conquista do espaço

Versão: 1,0

José Pedro do Amaral

31 de dezembro de 2025

Instruções

Em todos os problemas, justifica com equações e unidades.

Considera que os acontecimentos dos Problemas 1 a 5 ocorrem sequencialmente no tempo (a nave é sempre a mesma).

Quando necessário, despreza efeitos relativistas, rotação dos corpos e atrito.

Contexto geral: nave *CST–Astra*

A nave *CST–Astra* é concebida com:

$$m_{\text{seca}} = 25.000 \text{ kg}, \quad m_{\text{comb},0} = 45.000 \text{ kg}, \quad m_0 = m_{\text{seca}} + m_{\text{comb},0} = 70.000 \text{ kg}.$$

No Problema 2, a nave usa um motor com *velocidade efectiva de exaustão*

$$u = 4.500 \text{ m/s},$$

e realiza a manobra durante

$$\Delta t = 600 \text{ s}.$$

Dados

(Usa estes valores, mesmo que conheças aproximações diferentes.)

Parâmetro gravitacional da Terra	$\mu_{\oplus} = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Raio médio da Terra	$R_{\oplus} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$
Altitude da órbita inicial	$h = 400 \times 10^3 \text{ m}$
1 unidade astronómica	$1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$
Raio médio da órbita de Plutão	$R_P = 39,5 \text{ UA}$
Raio médio da órbita de Arrokoth	$R_A = 44,2 \text{ UA}$

Problemas

1. Velocidade de fuga (a partir de órbita circular).

A nave encontra-se inicialmente em órbita circular em torno da Terra, a altitude $h = 400$ km.

- Calcula a velocidade de fuga v_{fuga} no raio $r = R_{\oplus} + h$.
- Calcula a velocidade orbital circular v_{orb} no mesmo raio.
- Determina o incremento mínimo de velocidade (impulso instantâneo) necessário para passar de órbita circular para trajectória parabólica (fuga): $\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}}$.

Resposta:

a) $r = R_{\oplus} + h = 6,371 \times 10^6 \text{ m} + 4,00 \times 10^5 \text{ m} = 6,771 \times 10^6 \text{ m}$.

Pela conservação da energia (condição de fuga: energia mecânica nula no infinito):

$$\frac{1}{2}v_{\text{fuga}}^2 - \frac{\mu_{\oplus}}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r}}.$$

Logo,

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2(3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2)}{6,771 \times 10^6 \text{ m}}} = 1,085 \times 10^4 \text{ m/s} \approx 10,9 \text{ km/s}.$$

b) Para órbita circular:

$$\frac{v_{\text{orb}}^2}{r} = \frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r}} = 7,67 \text{ km/s}.$$

c) $\Delta v = v_{\text{fuga}} - v_{\text{orb}} \approx 10,9 \text{ km/s} - 7,67 \text{ km/s} = 3,18 \text{ km/s}$.

2. Empuxo (thrust) do motor e consumo de combustível.

A nave realiza a manobra de fuga do Problema 1 com um motor de velocidade efectiva de exaustão $u = 4.500$ m/s durante $\Delta t = 600$ s.

- Usando a equação de Tsiolkovsky, $\Delta v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$, calcula a massa final m_1 após a manobra.
- Calcula a massa de propelente consumida, $m_{\text{comb,cons}} = m_0 - m_1$, e a massa de combustível restante.
- Calcula a taxa média de escoamento de massa $\dot{m}$ e o empuxo médio $F = \dot{m}u$ (despreza o termo de pressão).

Resposta:

Do Problema 1, $\Delta v = 3,18 \times 10^3 \text{ m/s}$.

a) Pela equação de Tsiolkovsky:

$$\Delta v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) \Rightarrow m_1 = m_0 e^{-\Delta v/u}.$$

$$m_1 = 70.000 \text{ kg} \exp\left(-\frac{3.178 \text{ m/s}}{4.500 \text{ m/s}}\right) \approx 3,45 \times 10^4 \text{ kg}.$$

b) Consumo:

$$m_{\text{comb,cons}} = m_0 - m_1 \approx 70.000 \text{ kg} - 34.545 \text{ kg} = 35.455 \text{ kg}.$$

Combustível restante:

$$m_{\text{comb},1} = m_1 - m_{\text{seca}} \approx 34.545 \text{ kg} - 25.000 \text{ kg} = 9.545 \text{ kg}.$$

c) Taxa média:

$$\dot{m} = \frac{m_{\text{comb,cons}}}{\Delta t} \approx \frac{35.455 \text{ kg}}{600 \text{ s}} = 59,1 \text{ kg/s}.$$

Empuxo:

$$F = \dot{m} u \approx (59,1 \text{ kg/s})(4.500 \text{ m/s}) = 2,66 \times 10^5 \text{ N} \approx 266 \text{ kN}.$$

3. Rota para intersectar uma estação espacial com trajectória linear $y = mx + b$.

Após a manobra do Problema 2, considera um referencial inercial 2D em que, no instante $t = 0$:

$$\vec{r}_{\text{nave}}(0) = (0, 0) \text{ km}.$$

A nave segue em linha recta com rapidez constante $v = 6,0 \text{ km/s}$.

A estação espacial move-se ao longo da recta

$$y = mx + b \quad \text{com} \quad m = 0,75, \quad b = 200.000 \text{ km},$$

no sentido de x crescente, com rapidez constante $v_E = 2,0 \text{ km/s}$. No instante $t = 0$ a estação está em $x_0 = 1.000.000 \text{ km}$ (logo $y_0 = mx_0 + b$).

- Escreve as equações paramétricas $\vec{r}_E(t)$ da estação (componentes $x(t)$ e $y(t)$).
- Determina o instante t_* em que a nave pode interceptar a estação.
- Determina o ponto de intercepção (x_*, y_*) e o ângulo θ (em relação ao eixo x) da trajectória da nave.

Resposta:

a) A estação desloca-se na direcção do vector director $(1, m)$, logo o versor é

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(\hat{i} + m\hat{j}).$$

Com $m = 0,75$:

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,75^2}}(\hat{i} + 0,75\hat{j}).$$

A velocidade da estação é $\vec{v}_E = v_E \hat{u}$, isto é,

$$v_{Ex} = \frac{v_E}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad v_{Ey} = \frac{mv_E}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

A posição inicial é (x_0, y_0) com $y_0 = mx_0 + b = 0,75(1.000.000 \text{ km}) + 200.000 \text{ km} = 950.000 \text{ km}$.

Assim,

$$\vec{r}_E(t) = (x_0 + v_{Ex}t) \hat{i} + (y_0 + v_{Ey}t) \hat{j}.$$

b) A nave parte da origem com rapidez v , logo a sua posição tem módulo $|\vec{r}_{\text{nave}}(t)| = vt$. Para haver encontro, tem de acontecer:

$$|\vec{r}_E(t_*)| = vt_*.$$

Com os valores numéricos, resolve-se esta equação (um só $t_* > 0$), obtendo:

$$t_* \approx 3,44 \times 10^5 \text{ s} \approx 3,98 \text{ d}.$$

c) No instante t_* ,

$$(x_*, y_*) = \vec{r}_E(t_*) \approx (1,55 \times 10^6 \text{ km}, 1,36 \times 10^6 \text{ km}).$$

O ângulo da trajectória da nave é o do vector posição no encontro:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_*}{x_*}\right) \approx \arctan\left(\frac{1,36}{1,55}\right) \approx 41,3^\circ.$$

4. Tempo para intersectar a órbita de Plutão (modelo linear).

A partir daqui, muda-se para um referencial heliocêntrico 2D com o Sol na origem. Para simplificar, considera que o encontro do Problema 3 ocorreu quando a nave estava na posição heliocêntrica:

$$\vec{r}_0 = (1,00 \text{ UA}, 0) \quad \text{isto é} \quad \vec{r}_0 = (1,496 \times 10^8 \text{ km}, 0).$$

A nave parte dessa posição com velocidade constante:

$$\vec{v} = (8,0 \text{ km/s}) \hat{i} + (18,0 \text{ km/s}) \hat{j}.$$

A órbita de Plutão é aproximada por um círculo de raio $R_P = 39,5 \text{ UA}$.

- Escreve $\vec{r}(t)$.
- Determina $t_P > 0$ tal que $|\vec{r}(t_P)| = R_P$.
- Apresenta t_P em segundos e em anos (1 ano = 365,25 dias).

Resposta:

a) Movimento rectilíneo uniforme:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t = (x_0 + v_x t) \hat{i} + (y_0 + v_y t) \hat{j}.$$

b) Condição de intersecção com o círculo de raio R_P :

$$(x_0 + v_x t)^2 + (y_0 + v_y t)^2 = R_P^2.$$

Aqui $y_0 = 0$, $x_0 = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$, $v_x = 8,0 \text{ km/s}$, $v_y = 18,0 \text{ km/s}$, e $R_P = 39,5 \times 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 5,909.2 \times 10^9 \text{ km}$.

Logo:

$$(v_x^2 + v_y^2)t^2 + 2x_0v_x t + (x_0^2 - R_P^2) = 0,$$

cujas raízes físicas ($t > 0$) dá:

$$t_P \approx 2,97 \times 10^8 \text{ s}.$$

c) Em anos:

$$t_P \approx \frac{2,97 \times 10^8 \text{ s}}{3.600 \text{ s/h } 24 \text{ h/d } 365,25 \text{ d/ano}} \approx 9,41 \text{ anos}.$$

5. Trajectória linear pós-Plutão para intersectar Arrokoth.

No instante em que a nave cruza a órbita de Plutão (instante t_P do Problema 4), a sua posição é $\vec{r}_P = \vec{r}(t_P)$. Nesse mesmo instante, supõe que Arrokoth está na posição heliocêntrica (ponto fixo, para simplificar):

$$\vec{r}_A = R_A(\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}), \quad R_A = 44,2 \text{ UA}, \quad \varphi = 70^\circ.$$

Após um *flyby* em Plutão, a nave ajusta instantaneamente a sua velocidade para ter rapidez constante

$$v_2 = 22,0 \text{ km/s}$$

e seguir em linha recta até Arrokoth.

- Calcula $\vec{r}_P$ (componentes em km).
- Determina o versor direcção $\hat{n}$ da trajectória pós-Plutão que leva a nave até Arrokoth.
- Escreve a equação vectorial da trajectória $\vec{r}(t) = \vec{r}_P + v_2 \hat{n} t$.
- Calcula o tempo de voo Δt_A até Arrokoth e a distância percorrida nesse troço.

Resposta:

a) Do Problema 4: $\vec{r}_P = \vec{r}_0 + \vec{v}t_P$. Com $t_P \approx 2,97 \times 10^8 \text{ s}$:

$$\vec{r}_P \approx (2,52 \times 10^9 \text{ km}) \hat{i} + (5,34 \times 10^9 \text{ km}) \hat{j}.$$

b) Primeiro calcula-se $\vec{r}_A$. Como $R_A = 44,2 \text{ UA} = 44,2 \times 1,496 \times 10^8 \text{ km} = 6,612.32 \times 10^9 \text{ km}$:

$$\vec{r}_A \approx (2,26 \times 10^9 \text{ km}) \hat{i} + (6,21 \times 10^9 \text{ km}) \hat{j}.$$

Vector deslocamento:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_P \approx (-2,63 \times 10^8 \text{ km}) \hat{i} + (8,71 \times 10^8 \text{ km}) \hat{j}.$$

Versor direcção:

$$\hat{n} = \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \approx (-0,289) \hat{i} + (0,957) \hat{j}.$$

c) Trajectória pós-Plutão:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_P + v_2 \hat{n} t.$$

Logo a velocidade vectorial é:

$$\vec{v}_2 = v_2 \hat{n} \approx (-6,35 \text{ km/s}) \hat{i} + (21,1 \text{ km/s}) \hat{j}.$$

d) Se a nave aponta exactamente para Arrokoth, o tempo de voo é:

$$\Delta t_A = \frac{|\Delta \vec{r}|}{v_2}.$$

Com $|\Delta \vec{r}| \approx 9,09 \times 10^8 \text{ km}$ e $v_2 = 22,0 \text{ km/s}$:

$$\Delta t_A \approx \frac{9,09 \times 10^8 \text{ km}}{22,0 \text{ km/s}} = 4,13 \times 10^7 \text{ s} \approx 478 \text{ d} \approx 1,31 \text{ anos}.$$

A distância percorrida nesse troço é, por construção, $|\Delta \vec{r}| \approx 9,09 \times 10^8 \text{ km}$.