

Física 12.º ano

03 O Centro de Massa

Versão: 1,0

José Pedro do Amaral

7 de outubro de 2025

1	Centro de massa de formas arbitrárias	2			
1.1	Notação e conceitos	2	2.0.9	Segmento de círculo	8
1.1.1	Termos	2	2.0.10	Semicírculo	9
1.1.2	Técnicas de simulação ou amostragem de Monte Carlo.	2	2.0.11	Arco de círculo	9
1.1.3	Determinismo e estocasticidade.	3	2.0.12	Arco de segmento de círculo	10
1.2	Fórmulas gerais	4	2.0.13	Parábola	10
1.2.1	Exemplos gerais usando integrais (fora do âmbito da disciplina)	4	3	Como determinar qualquer centro de massa	11
1.2.2	Decomposição em partes (discretas ou contínuas)	4	3.1	Exemplos de exercícios	12
1.2.3	Centroide de polígono plano simples (fórmula sapateiro)	5	3.1.1	Método do recorte e equilíbrio	12
2	Exemplos de elementos geométricos simples	5	3.1.2	Decomposição em formas simples.	12
2.0.1	Rectângulo	5	3.1.3	Método da quadrícula (com células $0,25 \times 0,25$ m).	13
2.0.2	Triângulo recto	6	3.1.4	Método do polígono (fórmula fechada, «do sapateiro»)	15
2.0.3	Outros triângulos	6	3.1.5	Método Monte Carlo.	15
2.0.4	Círculo	6	3.2	Para calcular o CM de Portugal Continental (demonstração)	18
2.0.5	Anel circular	7	3.2.1	Método do polígono (método exacto)	18
2.0.6	Semicírculo	7	3.2.2	Método Monte Carlo (método por amostragem aleatória)	19
2.0.7	Quarto de círculo	8	3.2.3	Causas de erro comuns	21
2.0.8	Elipse	8			

1. Centro de massa de formas arbitrárias

Centro de massa (CM) é o ponto de um sistema material onde a massa «se concentra» para efeitos de translação: a resultante das forças externas, acelera esse ponto como se toda a massa aí estivesse localizada.

1.1 Notação e conceitos

1.1.1 Termos

m massa [kg]; M massa total [kg]; ρ densidade de massa [kg/m³] (3D) ou por área σ [kg/m²] (lâmina 2D).

$\vec{r} = (x, y, z)$ posição [m]; em lâmina: (x, y) ; em volume: (x, y, z) .

A área [m²]; V volume [m³].

Centro de massa CM (ou *centroide* se ρ uniforme): $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$.

Para lâminas de densidade superficial uniforme σ : $M = \sigma A$ e o CM coincide com o *centroide geométrico*.

Sequência ou ordem de contagem: no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (anti-horária, sinistrogira ou levogira) e no sentido dos ponteiros do relógio (horária ou dextrogira).

1.1.2 Técnicas de simulação ou amostragem de Monte Carlo.

As técnicas de Monte Carlo são métodos que usam números aleatórios para simular processos e estimar quantidades difíceis de obter por via analítica. O nome vem do Principado do Mónaco — célebre pelos seus casinos e associada jogatina — e foi popularizado por cientistas de Los Alamos na década de 1940, que viram nos jogos de azar uma metáfora clara para a aleatoriedade *controlada*.

O propósito é simples: quando um problema é demasiado complexo para resolver directamente (geometrias complicadas, muitos parâmetros, interacções não lineares, incerteza nos dados), em vez de o atacar com uma única conta exacta, gera-se uma amostra grande de cenários possíveis e observa-se o comportamento médio ou a distribuição dos resultados. Isto permite:

- a.) Estimativas numéricas robustas de quantidades de interesse (médias, proporções, riscos).
- b.) Quantificação de incerteza, devolvendo não só um valor central (ex.: média) mas também variabilidade e intervalos.
- c.) Trabalho eficiente em alta dimensão, onde métodos determinísticos sofrem com a «maldição da dimensionalidade».¹

¹É o nome dado a um conjunto de efeitos indesejáveis que surgem quando o número de variáveis (dimensões) de um problema cresce. À medida que se sobe de dimensão, (a) o espaço «explode»: o volume cresce tão depressa que os dados ficam extremamente esparsos. Mesmo muitos pontos parecem poucos — são necessárias amostras a crescer quase exponencialmente para manter a cobertura anterior com menos dimensões; (b) vizinhanças deixam de ser vizinhas: para manter uma vizinhança pequena

- d.) Explorar casos raros, por exemplo, eventos extremos, com técnicas de amostragem dirigidas.

Usa-se Monte Carlo quando há incerteza inevitável, quando os modelos são demasiado intrincados para solução fechada, ou quando o custo de uma aproximação estatística é muito menor do que o de um cálculo exacto. As limitações mais comuns são o custo computacional quando se exigem erros muito pequenos e a necessidade de se gerar aleatoriedade real e amostragens bem concebidas.

1.1.3 Determinismo e estocasticidade.

- a.) **Determinismo:** dado um conjunto de condições iniciais e regras do sistema, o resultado é sempre o mesmo (ex.: equação cartesiana de uma recta). Se se correr o modelo dez vezes, obtém-se o mesmo resultado dez vezes. A variabilidade observada vem apenas de diferenças nas entradas ou nos parâmetros, pois o mecanismo em si não introduz variabilidade. Modelos deterministas são adequados quando o sistema é previsível e os dados são estáveis; oferecem reprodutibilidade total mas não capturam flutuações.
- b.) **Estocasticidade:** o próprio mecanismo inclui elementos aleatórios. Mesmo com as mesmas condições iniciais, execuções repetidas podem produzir resultados diferentes. A variabilidade faz parte do modelo, representando incerteza intrínseca (por exemplo, flutuações naturais, ruído, eventos discretos imprevisíveis) ou incerteza que não se pode (ou não se quer) modelar de forma determinística. Modelos estocásticos são preferíveis quando as flutuações e o acaso afectam materialmente os resultados ou quando queres descrever probabilidades de desfechos, não apenas um trajecto «médio». Na prática, muitos problemas combinam ambos: um núcleo determinista (leis, balanços) e componentes estocásticas para representar variação, ruído de medição ou eventos aleatórios.

Em português corrente, «ao acaso» costuma significar «sem plano, sem critério visível, ao calhas», descrevendo assim a intenção (ou falta dela) de quem escolhe. Aleatório, pelo contrário, é um termo técnico: implica que os resultados são regidos por um mecanismo de incerteza explícito (por exemplo, um sorteio bem definido) e, idealmente, com probabilidades conhecidas. Assim, alguém pode escolher nomes ao acaso mas enviesar sem querer (tende a pegar nos de cima da lista); já amostragem aleatória exige um processo reprodutível que assegure imparcialidade (cada elemento com probabilidade conhecida e não nula). Em suma, ao acaso é coloquial e poderá ter ordem introduzida por enviesamento (quase sempre inconscientemente) e aleatório é controlado por um modelo de incerteza

em termos relativos, o seu raio tem de aumentar muito; com isso, pontos *perto* e *longe* ficam pouco distinguíveis. Métricas de distância tornam-se menos informativas; (c) a generalização piora: os modelos precisam de muito mais dados para aprender padrões reais e tornam-se mais sensíveis ao ruído, grelhas de parâmetros e tabelas humanamente legíveis tornam-se impraticáveis: o número de células cresce como uma potência do número de dimensões; (d) cálculo e procura encarecem: os métodos que dependem de cobrir o espaço, procurar vizinhos ou integrar funções em hipervolumes sofrem aumentos fortíssimos de custo computacional; e (e) a visualização e intuição perdem-se: torna-se difícil *ver* estruturas e validar suposições. Porque interessa para Monte Carlo? Em alta dimensão, amostras aleatórias cobrem mal o espaço e convergem mais devagar; por isso recorre-se a técnicas como amostragem dirigida ou por relevância, quasi-Monte Carlo, estratificação, redução de variância ou redução de dimensão para mitigar a «maldição».

como, por exemplo, o resultado do lançamento de um dado não-viciado — e é isto que interessa quando queremos inferir algo a partir da informação experimental.

Contudo, gerar aleatoriamente é difícil. Os computadores não «tiram à sorte» como um dado de jogo o faz, ao invés produzem pseudo-aleatoriedade por algoritmos deterministas que precisam de uma boa semente (*seed*) e não a tendo poderão introduzir padrões subtis. Se a semente for pobre (tiver pouca entropia), o resultado parece aleatório mas não é fiável. Fontes físicas (ruído térmico, erro de relógio, movimentos do rato, fenómenos quânticos, teclas pressionadas ao acaso) ajudam, mas são limitadas, ruidosas, exigem condicionamento e testes de qualidade. Em ciência e amostragem isto importa, pois escolhas ao acaso poderão enviesar sem que esse enviesamento seja imediatamente aparente. Portanto, ao se dizer que algo é aleatório implica provar que o processo tem probabilidades bem definidas e ausência de tendências, e isto requer geradores, sementes e validação adequados.

Assim, Monte Carlo é uma família de técnicas estocásticas para estudar sistemas complexos por amostragem; escolhe-se entre abordagens deterministas ou estocásticas conforme a natureza do fenómeno que se quer estudar e a importância da incerteza para as decisões que se quer tomar.

1.2 Fórmulas gerais

1.2.1 Exemplos gerais usando integrais (fora do âmbito da disciplina)

Lâmina (2D) com densidade uniforme σ

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} x \, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} y \, dA, \quad A = \iint_{\mathcal{A}} dA.$$

Se $\sigma(x, y)$ não for constante:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint x \sigma(x, y) \, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint y \sigma(x, y) \, dA, \quad M = \iint \sigma(x, y) \, dA.$$

Volume (3D) com densidade uniforme ρ

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint x \, dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint y \, dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint z \, dV, \quad V = \iiint dV.$$

Com $\rho(x, y, z)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint x \rho \, dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint y \rho \, dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint z \rho \, dV, \quad M = \iiint \rho \, dV.$$

1.2.2 Decomposição em partes (discretas ou contínuas)

Se a forma resultar da (ou puder ser decomposta na) união de n partes com áreas A_i , massas m_i (quando relevante) e centroides $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Para densidade uniforme: $m_i \propto A_i$ (lâmina) ou $m_i \propto V_i$ (volume).

1.2.3 Centroide de polígono plano simples (fórmula sapateiro)

Se o contorno é um polígono $\mathcal{P}$ de vértices (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, com $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (x_1, y_1)$:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^N (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad \bar{y} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^N (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

(Válida para densidade uniforme e polígono simples; para várias componentes, usar média ponderada pelas áreas.)

2. Exemplos de elementos geométricos simples

Uma figura cujo CM queiramos determinar, poderá resultar exactamente ou a grosso modo da união de n destas partes mais simples. Estas são sobretudo figuras geométricas simples e conhecidas e serão usadas no método de decomposição em formas simples (na secção 3.1.2). Estas imagens são de Jacob Moore et al. ([Centroids and Area Moments of Inertia for 2D Shapes](#)).

2.0.1 Rectângulo

O centroide (x, y) dum rectângulo é $(\frac{b}{2}, \frac{h}{2})$. A sua área é $A = b \cdot h$ (Fig. 1).

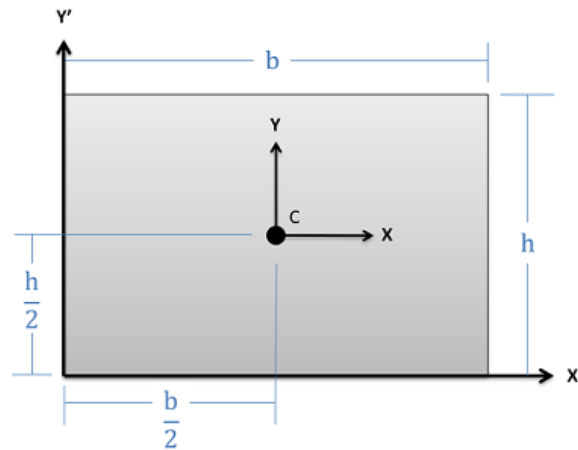


Figura 1. Um rectângulo.

2.0.2 Triângulo recto

O centroide (x, y) dum triângulo recto é $(\frac{b}{3}, \frac{h}{3})$. A sua área é $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (Fig. 2).

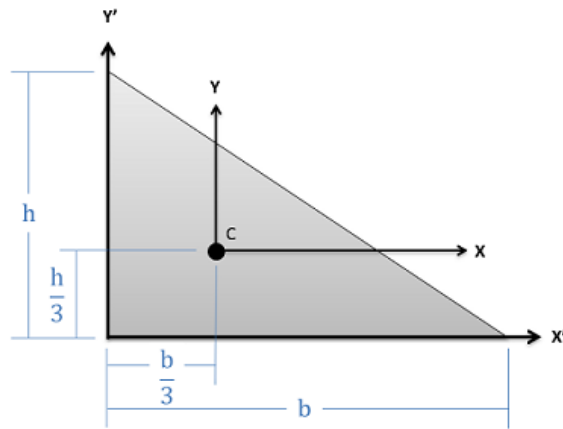


Figura 2. Um triângulo recto.

2.0.3 Outros triângulos

O centroide (x, y) de triângulos não-rectos é $(\frac{b}{2}, \frac{h}{3})$. A sua área é $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (Fig. 3).

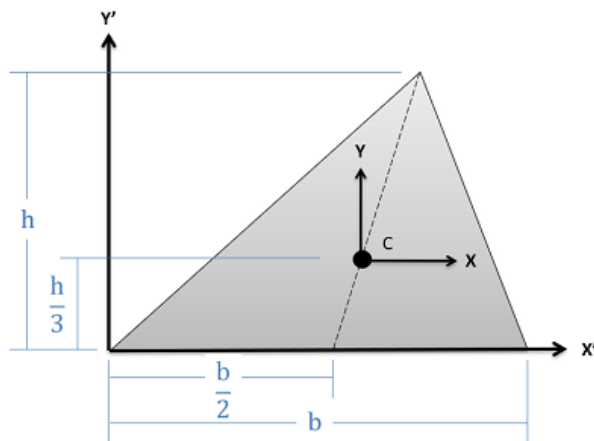


Figura 3. Um triângulo não recto.

2.0.4 Círculo

O centroide (x, y) deste círculo é $(0, 0)$. A sua área é $A = \pi \cdot r^2$ (Fig. 4).

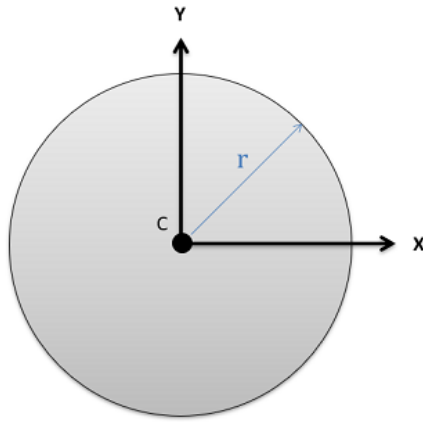


Figura 4. Um círculo.

2.0.5 Anel circular

O centroide (x, y) deste anel é $(0, 0)$. A sua área é $A = \pi \cdot (r_o^2 - r_i^2)$ (Fig. 5).

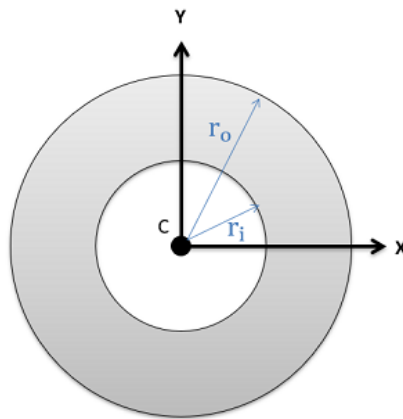


Figura 5. Um anel.

2.0.6 Semicírculo

O centroide (x, y) dum semicírculo é $(r, \frac{4}{3\pi}r)$. A sua área é $A = \frac{\pi}{2} \cdot r^2$ (Fig. 6).

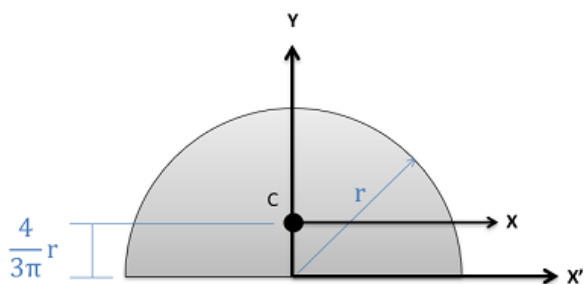


Figura 6. Um semicírculo.

2.0.7 Quarto de círculo

O centroide (x, y) dum quarto de círculo é $(\frac{4}{3\pi}r, \frac{4}{3\pi}r)$. A sua área é $A = \frac{\pi}{4} \cdot r^2$ (Fig. 7).

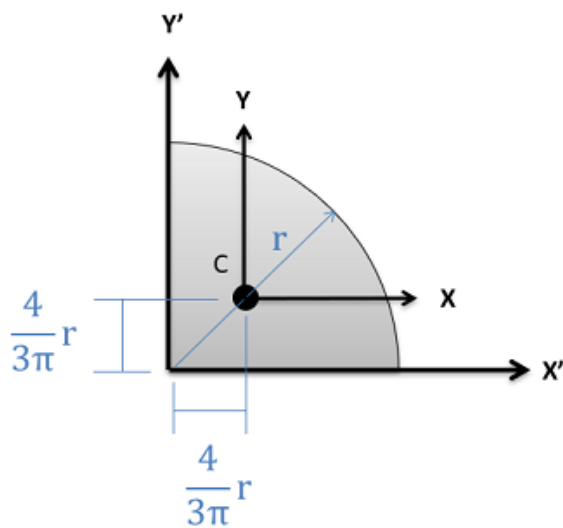


Figura 7. Um quarto de círculo.

2.0.8 Elipse

O centroide (x, y) duma elipse é (a, b) . A sua área é $A = \pi ab$ (Fig. 8).

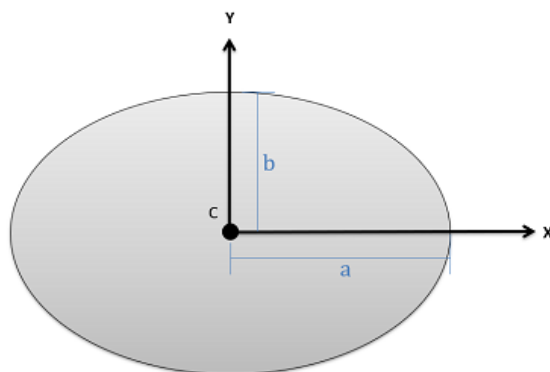


Figura 8. Uma elipse.

2.0.9 Segmento de círculo

O centroide (x, y) dum segmento de círculo é $(\frac{2}{3} \frac{r \cdot \sin \theta}{\theta}, 0)$. A sua área é $A = \theta r^2$ (Fig. 9).

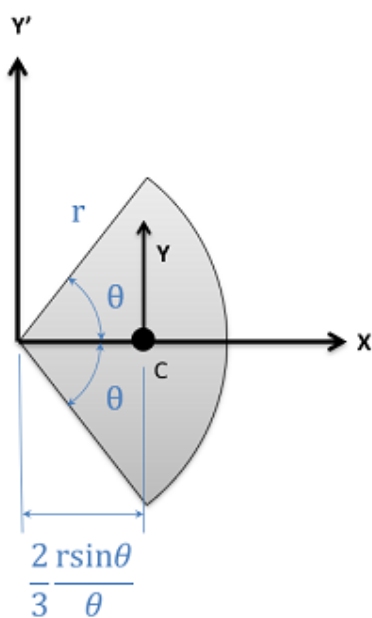


Figura 9. Um segmento de círculo.

2.0.10 Semicírculo

O centroide (x, y) dum arco de semicírculo é $(r, \frac{2r}{\pi})$ (Fig. 10).

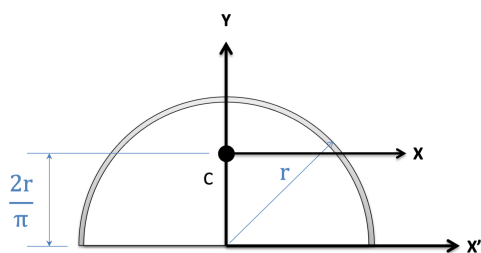


Figura 10. Um arco de segmento de círculo.

2.0.11 Arco de círculo

O centroide (x, y) dum arco de quarto de círculo é $(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi})$ (Fig. 10).

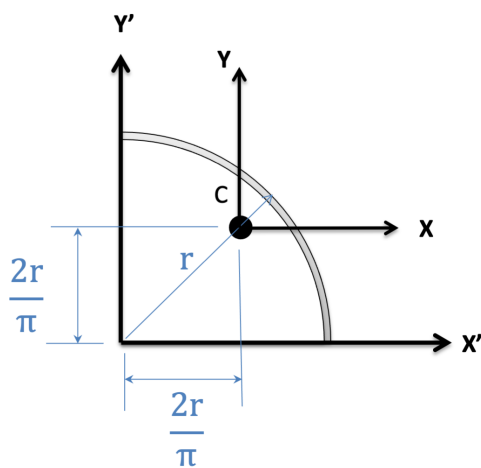


Figura 11
Um arco de quarto de círculo.

2.0.12 Arco de segmento de círculo

O centroide (x, y) dum arco de segmento de círculo é $(\frac{r \cdot \sin \theta}{\theta}, 0)$ (Fig. 12).

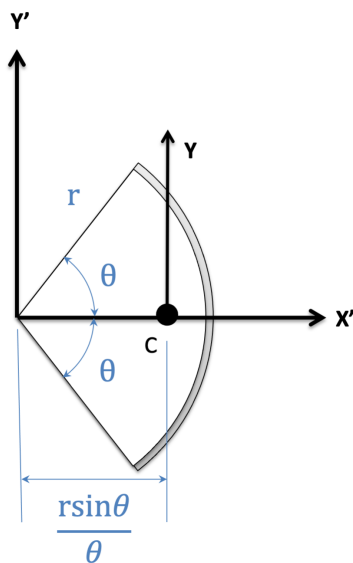


Figura 12. Um arco de segmento de círculo.

2.0.13 Parábola

O centroide (x, y) duma parábola é $(b, \frac{2}{5}a)$. A sua área é $A = \frac{4}{3}ab$ (Fig. 13).

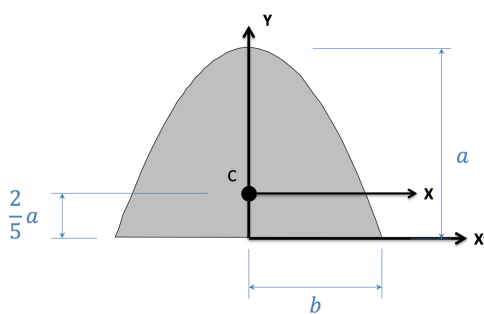


Figura 13. Uma parábola.

3. Como determinar qualquer centro de massa

Sequência didáctica de cinco (5) métodos. Estes métodos reflectem um balanço entre dificuldade de aplicação e dificuldade de computação (ou pelo menos de computação fastidiosa).

- 1) **Método do recorte e equilíbrio (manual).** Imprime o contorno numa cartolina de gramagem² uniforme, recorta e encontra o ponto de equilíbrio com uma agulha: esse ponto é o centroide (aproximação física directa).
- 2) **Decomposição em formas simples (média ponderada pelas áreas).** Determina qual o conjunto de formas simples que melhor defina a área total (ver na secção 14). Calcula $(A_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k)$ para cada componente k (com o sinal correcto em A_k). O centroide global é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_k A_k \bar{x}_k}{\sum_k A_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_k A_k \bar{y}_k}{\sum_k A_k}.$$

- 3) **Método da quadrícula (contagem de células).** Sobre põe uma grelha quadrada (passo h). Marca as células totalmente dentro e as parcialmente dentro com pesos (p.ex., 0,5 para meia-célula ou 0,33 para um terço de célula; a célula completa terá um peso de 1). O centroide aproxima-se por média ponderada dos centros de célula (Figs. 14, 15):

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_j w_j x_j}{\sum_j w_j}, \quad \bar{y} \approx \frac{\sum_j w_j y_j}{\sum_j w_j},$$

onde w_j é a fracção de área da célula j no interior, x_j, y_j o centro da célula.

- 4) **Método do polígono (fórmula fechada, «do sapateiro»).** Digitaliza apenas o *contorno exterior* de cada componente (Continente, Açores, Madeira) numa **projectão planar** (p.ex., PT-TM06 / EPSG:3763). Extrai os vértices (x_i, y_i) ordenados ao longo do contorno e fecha o polígono com $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.

(a) *Determinantes de aresta.* Para cada aresta, define

$$D_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i.$$

(b) *Área com sinal (sapateiro).*

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i.$$

Nota: Exterior em sentido anti-horário dá $A > 0$; exterior em sentido horário dá $A < 0$. Para a posição do centroide, usa A com *sinal*.

(c) *Centroide do polígono.*

$$\bar{x} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1}) D_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) D_i.$$

²Valor que expressa a massa em grama de um m^2 de um certo papel.

(d) *Furos (anéis interiores)*. Se existirem furos, aplica as mesmas fórmulas a cada anel interior mas fornecendo os seus vértices em **sentido horário** (área negativa) para que sejam subtraídos automaticamente.

(e) *Verificações essenciais*:

- Trabalhar sempre em coordenadas **planas** (metros), não em graus.
- Garantir uma sequência consistente: **anti-horária** para exteriores; **horária** para furos.
- Fechar o polígono: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.
- Usar A **com sinal** nas fórmulas de $\bar{x}, \bar{y}$.

5) Método de Monte Carlo (estatístico). Lança N pontos aleatórios numa caixa que contenha a forma; mantém os n pontos que caem *dentro* do contorno e calcula a média das suas coordenadas:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p, \quad \bar{y} \approx \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n y_p.$$

O erro decresce como $\sim 1/\sqrt{n}$; o que é óptimo para turmas com vários grupos a somar amostras.

3.1 Exemplos de exercícios

3.1.1 Método do recorte e equilíbrio

Este método é totalmente manual e não computacional. A forma é recortada em cartolina de gramagem uniforme. Depois, acha-se o CM fazendo furos na região central da cartolina. Após cada furo testa-o equilíbrio da forma. O CM corresponderá ao furo no qual a forma se equilibre quer verticalmente, quer horizontalmente.

3.1.2 Decomposição em formas simples.

Considere-se como exemplo uma figura resultante de um círculo e de três rectângulos adjacentes formando um C (Fig. 14). O círculo tangente está à esquerda do C e tem um raio r e centro $(-r, H/2)$, com área $A_o = \pi r^2$. A componente rectangular (o C) tem as características seguintes:

barra superior: largura W , espessura t ($A_{\text{top}} = Wt$, centro $(W/2, H - t/2)$);
 barra inferior: largura W , espessura t ($A_{\text{bot}} = Wt$, centro $(W/2, t/2)$);
 barra esquerda: largura t , altura $H - 2t$ ($A_\ell = t(H - 2t)$, centro $(t/2, H/2)$).

A área total e o centro de massa (CM) são:

$$A_{\text{tot}} = A_{\text{top}} + A_{\text{bot}} + A_\ell + A_o, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{A_{\text{top}}(x_{\text{top}}, y_{\text{top}}) + A_{\text{bot}}(x_{\text{bot}}, y_{\text{bot}}) + A_\ell(x_\ell, y_\ell) + A_o(x_o, y_o)}{A_{\text{tot}}}.$$

Para os valores numéricos $W = 8$ m, $H = 6$ m, $t = 1,5$ m e $r = 1,2$ m:

$$\begin{aligned} A_{\text{top}} = A_{\text{bot}} = Wt &= 12 \text{ m}^2, & A_{\ell} &= t(H - 2t) = 4,5 \text{ m}^2, & A_{\circ} &= \pi r^2 \approx 4,524 \text{ m}^2, \\ A_{\text{tot}} &\approx 33,024 \text{ m}^2, & (x_{\text{top}}, y_{\text{top}}) &= (4, 5,25), & (x_{\text{bot}}, y_{\text{bot}}) &= (4, 0,75), \\ (x_{\ell}, y_{\ell}) &= (0,75, 3), & (x_{\circ}, y_{\circ}) &= (-1,2, 3). \end{aligned}$$

Assim, os resultados finais serão:

$$\begin{aligned} A_{\text{tot}} &\approx 33,024 \text{ m}^2, \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\approx (2,845, 3,000) \text{ m}. \end{aligned}$$

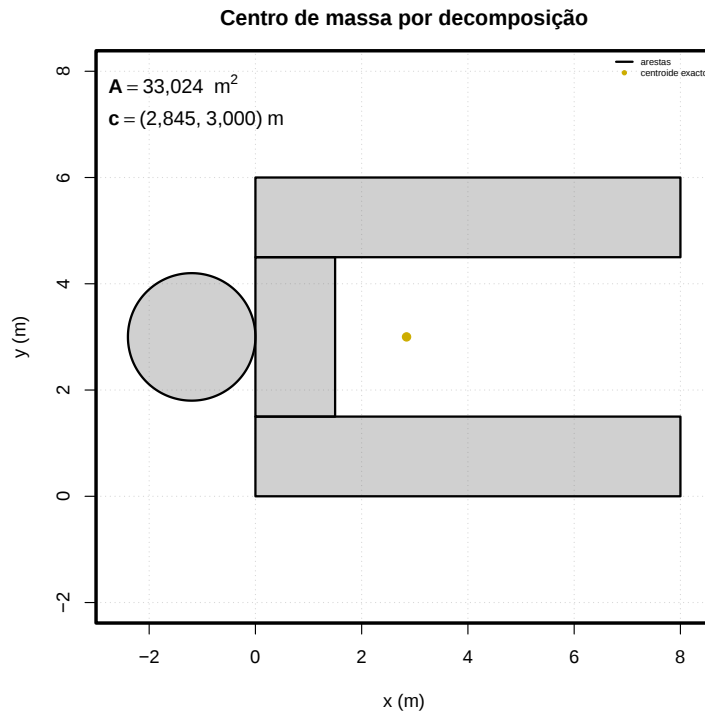


Figura 14. Figura de forma composta. A é a área e c é o centroide. As figuras componentes consideradas estão delineadas por arestas pretas e enchidas a cinzento. O centroide exacto da figura está marcado a amarelo dourado está localizado fora dos componentes físicos da figura.

3.1.3 Método da quadrícula (com células $0,25 \times 0,25$ m).

Considere-se o polígono com vértices (em metros) $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 2)$, $(2, 3)$, $(0, 2)$. Sobreponha-se uma quadrícula de passo $s = 0,25$ m; cada célula tem uma área $s^2 = 0,0625 \text{ m}^2$ e centro no ponto médio (Fig. 15).

No método da quadrícula por centros, contam-se as células cujos centros pertencem ao polígono. As células pertencem ao polígono se os seus centros estiverem dentro dos limites; as células não pertencem ao polígono se os seus centros estiveram fora do polígono ou sobre a linha de aresta — a isto chamamos o *critério do centro*.

$$A_{\text{quad}} \approx n s^2, \quad (\bar{x}, \bar{y})_{\text{quad}} \approx \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right),$$

onde (x_k, y_k) são os centros das n células aceites.

Para este polígono (e o seu $s = 0,25$ m), obteve-se numericamente:

$$\begin{aligned} A_{\text{exact}} &= \frac{23}{2} = 11,5 \text{ m}^2, \\ (\bar{x}, \bar{y})_{\text{exact}} &= \left(\frac{157}{69}, \frac{91}{69} \right) \approx (2,275, 1,319) \text{ m}; \\ A_{\text{quad}} &\approx 11,375 \text{ m}^2, \\ (\bar{x}, \bar{y})_{\text{quad}} &\approx (2,262, 1,309) \text{ m}. \end{aligned}$$

Nota. A aproximação melhora quando s diminui (e consequentemente o número de células aumenta); células totalmente dentro contam como 1, completamente fora como 0 e as de fronteira ficam aproximadas pelo critério do centro³.

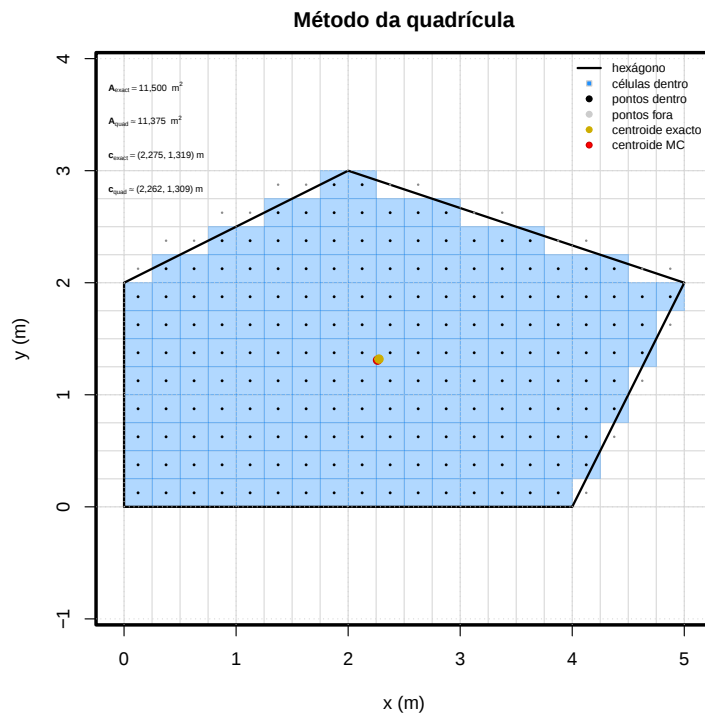


Figura 15. Figura de forma composta. A_{exact} é o valor da área exacta; A_{quad} é o valor da área computada; c_{exact} é o valor do centroide exacto (ponto amarelo dourado); e c_{quad} é o valor do centroide computado (ponto vermelho). Os quadrados azuis são as células de $0,25 \text{ m} \times 0,25 \text{ m}$ consideradas e os pontos pretos os seus centros; os pontos cinzentos são os centros das células intersectadas mas não consideradas (centro fora ou na linha limítrofe do polígono).

3.1.4 Método do polígono (fórmula fechada, «do sapateiro»)

Considerando o polígono da Figura 16 com os vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(5,2)$, $(2,3)$, $(0,2)$ em metros, pode-se calcular a área A com a determinante de aresta D . é de salientar que é fundamental fixar uma sequência de vértices antes de se iniciar os cálculos.

$$D_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$$

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i$$

³Se o centro está dentro do polígono, a célula conta, mas se o centro está fora do polígono ou na sua linha limítrofe, a célula não conta.

Assim e usando as fórmulas anteriores: para a área

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - (0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0)) \\ &= \frac{1}{2}((0 + 8 + 15 + 4 + 0) - (0 + 0 + 4 + 0 + 0)) \\ &= \frac{23}{2} = 11,5 \text{ m}^2, \end{aligned}$$

para a abscissa do CM

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{6A} \sum (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{6A} [(0 + 4) \cdot 0 + (4 + 5) \cdot 8 + (5 + 2) \cdot 11 + (2 + 0) \cdot 4 + (0 + 0) \cdot 0] \\ &= \frac{0 + 72 + 77 + 8 + 0}{6 \cdot 11,5} = \frac{157}{69} \approx 2,275. \end{aligned}$$

e para a ordenada do CM

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{6A} \sum (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{6A} [(0 + 0) \cdot 0 + (0 + 2) \cdot 8 + (2 + 3) \cdot 11 + (3 + 2) \cdot 4 + (2 + 0) \cdot 0] \\ &= \frac{0 + 16 + 55 + 20 + 0}{6 \cdot 11,5} = \frac{91}{69} \approx 1,319. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado final é

$$\begin{aligned} A &= 11,5 \text{ m}^2 \\ (\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\frac{157}{69}, \frac{91}{69} \right) \approx (2,275, 1,319) \text{ m} \end{aligned}$$

3.1.5 Método Monte Carlo.

Este método é conceptualmente muito interessante. É um método por aproximação baseado em amostragem aleatória. Surpreendentemente, funciona bem mesmo com uma amostragem pequena (mas funcionaria melhor com uma amostragem maior⁴). Como ilustrado na Figura 17, considere-se o hexágono regular com vértices $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, contido no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. O seu centroide exacto, por simetria (ou pela fórmula do polígono), é $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.

Área exacta do hexágono regular usado. Os vértices são $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. A distância entre os dois primeiros vértices é

$$s = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

logo o lado do hexágono é $s = 1$ (hexágono regular de lado unitário).

⁴Para este efeito será de ter em conta o exemplo dos cálculos do CM de Portugal Continental feitos na secção 3.2.

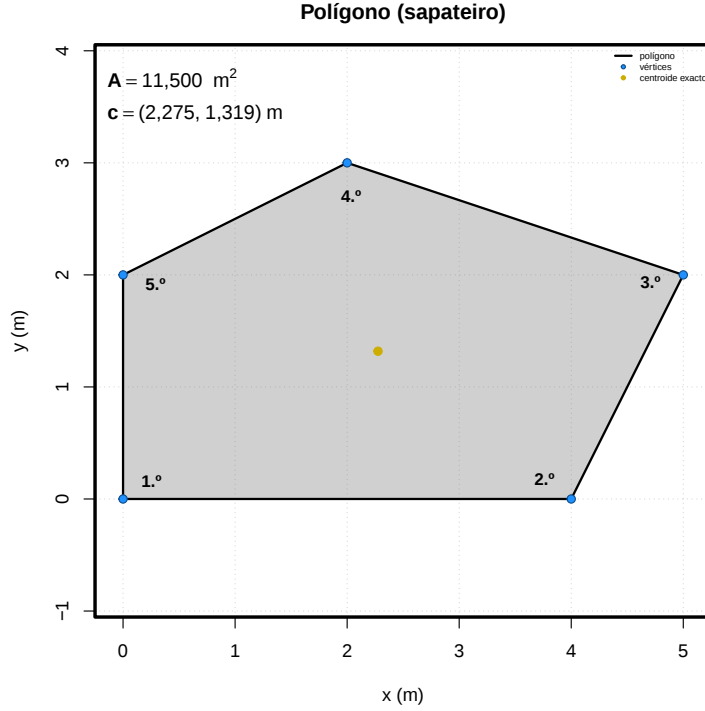


Figura 16. Polígono. **A** é a área e **c** é o centroide (ponto amarelo dourado). O contorno do polígono está definido a preto e sua área a cinzento. Os vértices estão marcados por pontos a azul e sua sequência de uso por ordinais.

Via 1 — Decomposição em 6 triângulos equiláteros. Um triângulo equilátero de lado s tem área $A_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. O hexágono regular de lado s subdivide-se em 6 desses triângulos:

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2.$$

Com $s = 1$: $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598$.

Via 2 — «Sapateiro» (fórmula fechada) com os vértices dados. Ordenando os vértices no sentido anti-horário e definindo $D_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$,

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 D_i.$$

Cálculo termo a termo:

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ D_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ D_3 &= -\frac{1}{2} \cdot 0 - (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ D_4 &= (-1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ D_5 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ D_6 &= \frac{1}{2} \cdot 0 - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Logo $\sum_i D_i = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ e

$$A = \frac{1}{2} \sum_i D_i = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598.$$

Observação útil. Para um hexágono regular inscrito num círculo de raio R (circunrádio), tem-se $s = R$ e, portanto,

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2.$$

Teste «dentro ou fora» (fecho por semiplanos): um ponto (x, y) está *dentro* se

$$|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad |x| \leq 1 - \frac{|y|}{\sqrt{3}}.$$

Amostra única de $N = 12$ pontos na caixa $[-1, 1]^2$:

$(0,80, 0,10)$	✓	dentro
$(-0,90, 0,20)$	×	fora
$(0,50, 0,60)$	✓	dentro
$(-0,30, 0,70)$	✓	dentro
$(0,10, -0,80)$	✓	dentro
$(-0,60, -0,70)$	×	fora
$(0,00, 0,00)$	✓	dentro
$(-0,40, 0,40)$	✓	dentro
$(0,90, -0,30)$	×	fora
$(-0,20, -0,10)$	✓	dentro
$(0,65, 0,70)$	×	fora
$(0,20, -0,50)$	✓	dentro

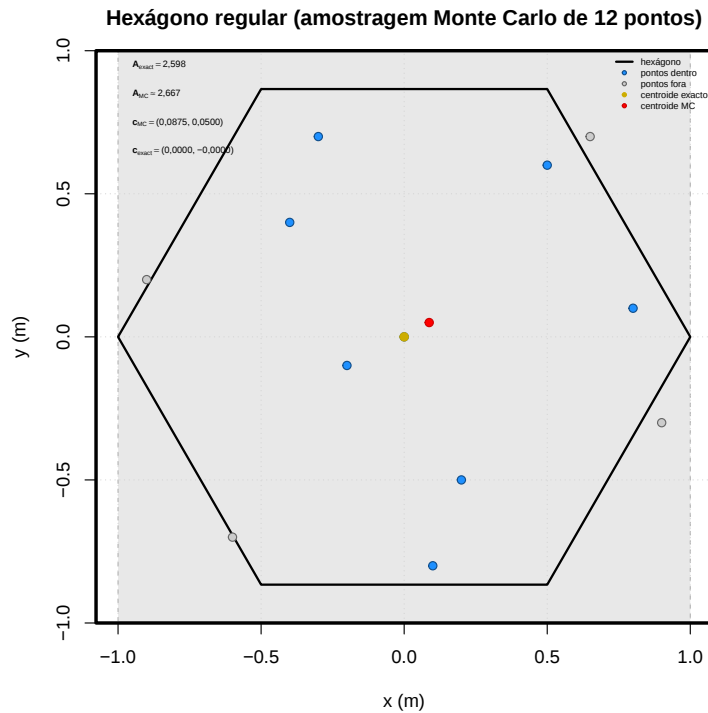


Figura 17. Hexágono com limites a preto com amostragem Monte Carlo com $N = 12$. $\mathbf{A}_{exact}$ é o valor da área exacta; $\mathbf{A}_{quad}$ é o valor da área computada; $\mathbf{c}_{exact}$ é o valor do centroide exacto (ponto amarelo dourado); e $\mathbf{c}_{quad}$ é o valor do centroide computado (ponto vermelho). O quadrado cinzento define a área limite na qual a amostragem aleatória é feita. Os pontos azuis são pontos de amostragem que caíram dentro do hexágono; os pontos cinzentos são pontos não considerados (caíram fora do polígono ou na sua linha limítrofe).

Neste caso ficaram $n = 8$ pontos dentro e $n = 4$ pontos fora num total de $N = 12$ candidatos.

Centroide por Monte Carlo (média dos aceites):

$$\bar{x}_{\text{CM}} = \frac{1}{8} \sum x_i = \frac{0,70}{8} = 0,0875, \quad \bar{y}_{\text{CM}} = \frac{1}{8} \sum y_i = \frac{0,40}{8} = 0,0500.$$

Comparação com o centroide exacto:

$$(\bar{x}_{\text{CM}}, \bar{y}_{\text{CM}}) \approx (0,0875, 0,0500) \quad \text{vs} \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0),$$

erro euclidiano $\approx 0,101$ (com apenas $n = 8$ pontos aceites).

(Adicional) Área por razão de candidatos aceites:

$$A_{\text{CM}} = \text{area}([-1, 1]^2) \cdot \frac{n}{N} = 4 \cdot \frac{8}{12} = 2,667,$$

próximo de $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598$ com esta amostra pequena.

Notas. (i) O centroide por CM é sempre a **média das coordenadas dos pontos aceites**.

(ii) A precisão cresce como $\sim 1/\sqrt{n}$; com 10^3 – 10^4 aceites, o erro desce tipicamente para a ordem de milímetros no exemplo em metros.

3.2 Para calcular o CM de Portugal Continental (demonstração)

O CM de Portugal Continental poderá ser calculado no âmbito do que já discutimos de duas maneiras. A primeira seria o método do polígono; que é um método exacto. A segunda seria por um método de amostragem Monte Carlo.

3.2.1 Método do polígono (método exacto)

Este método será idêntico ao do polígono descrito anteriormente, mas para polígonos de formas mais complexas e disjuntos.

- a). Escolhe-se uma projecção métrica (ex.: PT-TM06/ETRS89). Trabalhar em lat/long não é adequado.
- b). Obtém-se o contorno poligonal do Continente e de cada arquipélago (um polígono por ilha ou por conjunto).
- c). Calcula-se $(A_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k)$ de cada componente com a fórmula do polígono.
- d). Combina-se por média ponderada de áreas:

$$\bar{x}_{\text{PT}} = \frac{\sum_k A_k \bar{x}_k}{\sum_k A_k}, \quad \bar{y}_{\text{PT}} = \frac{\sum_k A_k \bar{y}_k}{\sum_k A_k}.$$

- e). *Extensão (opcional)*: centro de massa poderá refletir outras distribuições que não as de área. Poderíamos assim calcular um CM «populacional» em que se trocava área por população P_k ou por densidade $\sigma(x, y)$ se existir acesso ao dados de distribuição apropriados).

3.2.2 Método Monte Carlo (método por amostragem aleatória)

Este método será idêntico ao MonteCarlo descrito anteriormente, mas neste caso para um polígono (ou até polígonos) de forma mais complexa. Para avançar a discussão para conceitos de exactidão e precisão, incluo dois exemplos deste método. Em ambos os exemplos determina-se o centroide de Portugal Continental, mas o que varia de um método para o outro é o número de amostras aleatórias: 1.000 num (Fig. 18), 50.000 no outro (Fig. 19). Em ambos os casos, o teste é repetido 100 vezes e o centroide final é a média desses 100 centroides. A área total não foi calculada, mas poderia ter sido calculada usando a razão de pontos escolhidos como fraccionadora do rectângulo contendor.

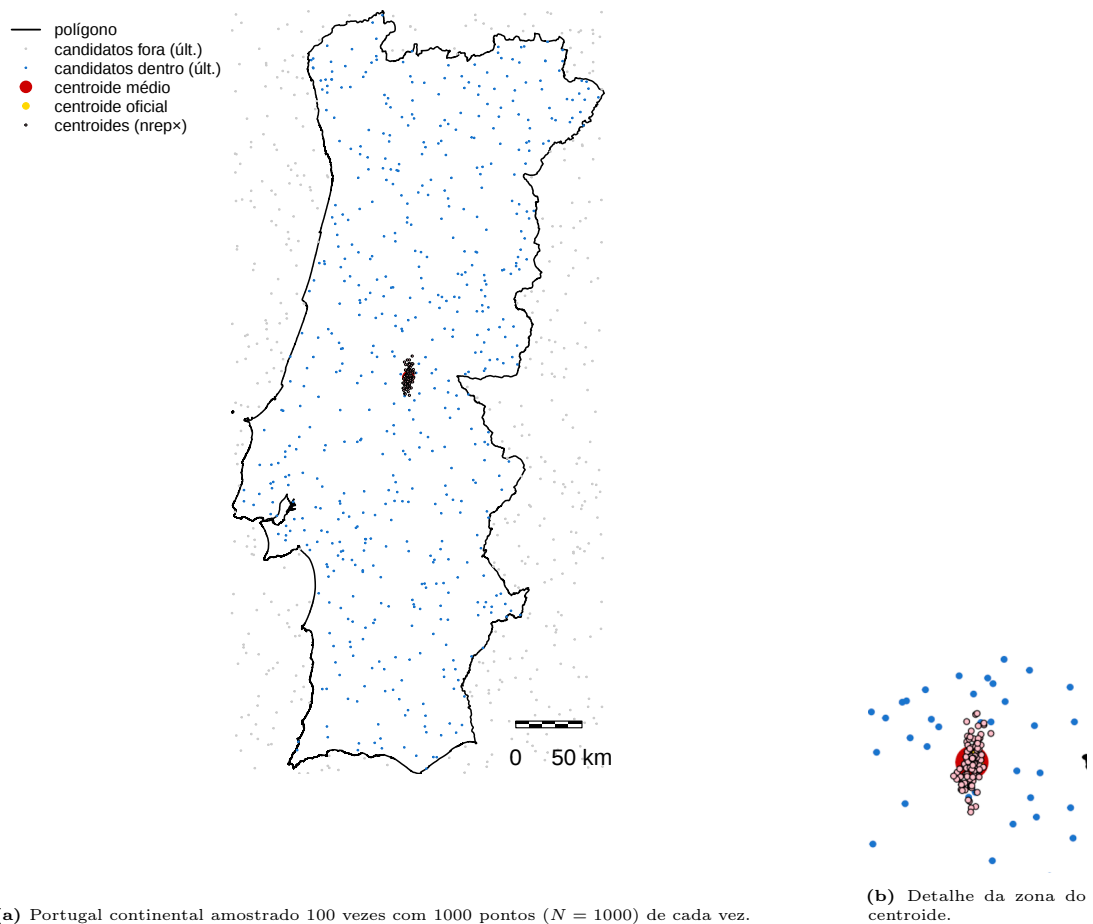


Figura 18. Portugal continental amostrado 100 vezes com 1000 pontos ($N = 1000$) de cada vez. O contorno poligonal está a preto. Os candidatos de N fora estão a cinzento e os dentro estão a azul. O centroide médio é o ponto vermelho; o centroide oficial está a amarelo; e os centroides calculados cada uma das 100 vezes estão a cor de rosa ($nrep$). (b) Detalhe da zona do centroide mostrando uma precisão e exactidão baixas quando os pontos dos centroides das 100 repetições são considerados em grupo, mas uma exactidão elevada para o centroide médio em relação ao centroide oficial. A escala corresponde a 50 km.

A exactidão deste método é muito elevada, mesmo quando a sua precisão é relativamente baixa (Fig. 18b). Nos casos de amostragem mais reduzida (Fig. 18), como a amostragem é sempre aleatória e o teste é repetido 100, isto põe os valores à volta do centroide oficial. Calcular a média suaviza este erro e dá um ponto médio calculado de centroide muito próximo do oficial (Fig. 18b). Consequentemente, aumentando o número de pontos de amostra por teste, neste caso de 1.000 para 50.000, aumentaria também a precisão do

teste (Fig. 19b). Curiosamente e demonstrando o poder atenuador de erro da média, a exactidão da média dos 100 centroides resultantes não é muito maior.

Esta capacidade de observação do comportamento médio de um sistema, a robustez de sua resistência ao erro e a sua economia computacional são grandes vantagens dos métodos Monte Carlo. Contudo e como não há bela sem senão, estes métodos dependem de computadores ou de outros mecanismos que assegurem a estocasticidade da amostragem.

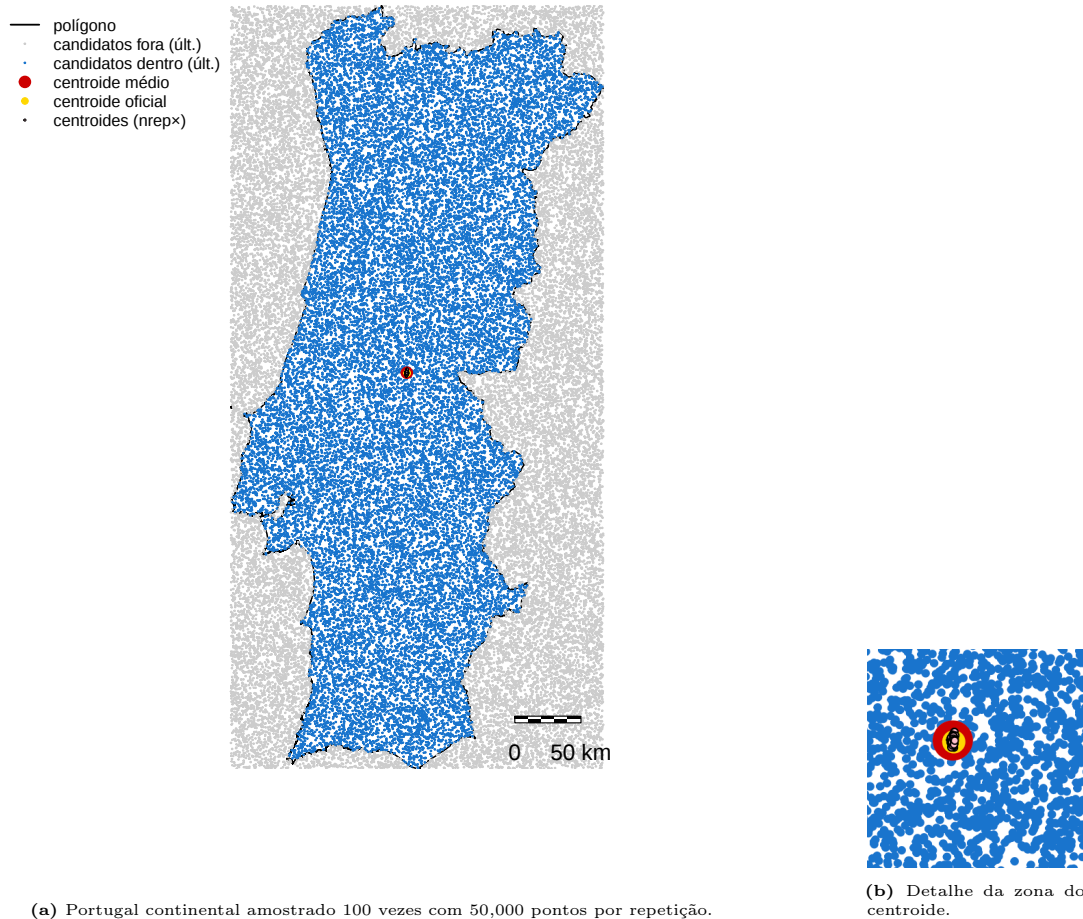


Figura 19. (a) Amostragem com $N = 50,000$. O contorno está a preto; candidatos fora a cinzento, dentro a azul; centroide médio a vermelho; centroide oficial a amarelo; centroides das 100 repetições a cor-de-rosa ($nrep \times$). (b) Detalhe da zona do centroide mostrando uma precisão e exactidão muito elevados: todos os pontos dos centroides das 100 repetições estão na proximidade do centroide oficial. A escala corresponde a 50 km.

3.2.3 Causas de erro comuns

Projecção. Coordenadas geográficas (lat-long) não são cartesianas. Projecta-se primeiro para um sistema métrico adequado (p. ex., PT-TM06/ETRS89) e só depois se aplicam as fórmulas de polígono e área. Claro que depois de se ter o centroide, este terá que ser convertido de volta para coordenada geográfica para ser representado no mapa.

Componentes múltiplas. Portugal como um todo não é conexo: Continente, Madeira, Açores. O CM do território português seria a média ponderada pelas áreas (ou massas, se densidade variar) dos três conjuntos.⁵

O que se está a medir? *Centroide da superfície* (lâmina) difere de *centro de massa real* se a densidade não for uniforme (relevo, geologia). Em geral pressupomos uma densidade uniforme (daí o uso do termo centroide!).

⁵Se definirmos o centroide do Continente em $-7.970878, 39.653970$ (WGS84) (que é o que já usamos nos nossos cálculos) e lhe juntarmos os Açores ($\approx 2.330 \text{ km}^2$) e Madeira com Desertas ($\approx 800 \text{ km}^2$) e Selvagens ($\approx 3 \text{ km}^2$), o centro de massa de todo o território português (Continente, Açores e Madeira incluindo Desertas e Selvagens) desloca-se ligeiramente para sudoeste e ficaria com muito boa aproximação, em $-8.555, 39.567$ (WGS84). Isto dá-nos um ponto algures entre Leiria e Pombal, a $\approx 25\text{--}35 \text{ km}$ da costa. Porque fica quase no mesmo sítio que o CM do território continental? Porque a área do Continente ($\approx 89.000 \text{ km}^2$) domina a ponderação; os Açores ($\approx 2.300\text{--}2.3500 \text{ km}^2$) e a Madeira ($\approx 800 \text{ km}^2$) somam $\approx 3,5\%$ da área total, deslocando o centroide só um pouco para sudoeste.