

Gravidade, tempo e velocidade: notas compactas

ZP

O que é a gravidade?

Quadro de Newton: força, campo e potencial

A gravidade é uma força de atração entre massas:

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Equivalente e mais útil é falar do *campo* gravítico $\mathbf{g}$ e do *potencial* Φ :

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi, \quad \nabla^2\Phi = 4\pi G \rho.$$

Uma esfera (ou algo esfericamente simétrico) no exterior comporta-se como massa concentrada no centro:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}.$$

Porque é que a Terra “cria” um campo? Porque a sua densidade de massa ρ gera Φ via a equação de Poisson, e o gradiente $-\nabla\Phi$ é a aceleração que medes.

Relatividade Geral: curvatura e geodésicas

Na RG, gravidade não é uma força extra: é a **curvatura** do espaço-tempo. Matéria e energia (densidade, pressões, fluxos) aparecem no tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ e determinam a geometria via as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

onde $G_{\mu\nu}$ codifica a curvatura construída a partir da métrica $g_{\mu\nu}$. Partículas e luz movem-se por *geodésicas* da métrica (trajetórias “sem força”):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

No limite fraco e lento, a RG reduz-se a Newton: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ e $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$.

Ideia central: tempo próprio

O teu relógio mede o *tempo próprio* τ :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Em campo fraco e velocidades baixas,

$$\frac{d\tau}{dt} \approx \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}. \quad (1)$$

Dilatação por velocidade (Relatividade Especial)

Apenas com velocidade constante v ,

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Quem viaja rápido acumula *menos* tempo próprio (paradoxo dos gêmeos resolvido por trajetórias/linhas de universo diferentes).

Dilatação gravitacional (Relatividade Geral)

Regra de bolso (perto da Terra)

Entre dois níveis separados por Δh ,

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\Delta\Phi}{c^2} \approx \frac{g \Delta h}{c^2}.$$

A 1000 m, $\Delta f/f \approx 1.1 \times 10^{-13}$: o relógio mais alto adianta ~ 9 ns/dia ($\sim 3.4 \mu\text{s}/\text{ano}$).

Mesmo junto a horizontes (Schwarzschild)

Relógio *parado* a raio r :

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Quando $r \rightarrow r_s$, o fator tende a zero (visto de longe, o relógio abranda imenso). Pairar tão perto exige

$$a(r) = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - r_s/r}},$$

que diverge quando $r \rightarrow r_s$.

Gravidade + velocidade (órbitas rápidas)

Se te moves depressa *e* estás fundo no poço,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Exemplo (ISS): altitude ~ 400 km dá termo gravitacional $\sim +4 \times 10^{-11}$ (mais rápido), mas $v \approx 7.7$ km/s dá termo cinemático $\sim -3 \times 10^{-10}$ (mais lento). Resultado líquido $\approx -8 \times 10^{-3}$ s/ano: o astronauta envelhece *menos*.

Resumo operativo

- Velocidade alta $\Rightarrow$ relógio mais lento (menor τ por t).
- Potencial mais baixo (mais negativo) $\Rightarrow$ relógio mais lento.
- Em poços gravíticos extremos (neutrões, buracos negros) e/ou com velocidades relativísticas, as diferenças acumuladas podem ser de anos ao comparar com relógios distantes.