

Física 12.º ano
01 Problemas — cinemática da partícula
(versão com respostas)

Versão: 0,1

José Pedro do Amaral

4 de outubro de 2025

Problema AE-A1 — Quantidade de movimento e conservação

Enunciado. Numa pista horizontal sem atrito, um carrinho A de massa $m_1 = 0,40$ kg move-se para a direita com $v_1 = 5,0$ m/s e colide frontalmente com um carrinho B de massa $m_2 = 0,60$ kg que se desloca para a esquerda com $v_2 = -2,0$ m/s. A colisão é *elástica*. Determina v'_1 e v'_2 após a colisão e verifica a conservação de P e de K .

Dados. $m_1 = 0,40$ kg; $m_2 = 0,60$ kg; $v_1 = +5,0$ m/s; $v_2 = -2,0$ m/s. Colisão elástica (conserva P e K).

Objetivo. Calcular v'_1 e v'_2 ; verificar P e K .

Estratégia. Em 1D e colisão elástica, aplicam-se directamente as fórmulas fechadas:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

Resolução.

$$v'_1 = \frac{0,40 - 0,60}{1,00} \cdot 5,0 + \frac{2 \cdot 0,60}{1,00} \cdot (-2,0) = -3,4 \text{ m/s},$$
$$v'_2 = \frac{2 \cdot 0,40}{1,00} \cdot 5,0 + \frac{0,60 - 0,40}{1,00} \cdot (-2,0) = +3,6 \text{ m/s}.$$

Verificação de P :

$$P_{\text{antes}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,40 \cdot 5,0 + 0,60 \cdot (-2,0) = 0,80 \text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$P_{\text{depois}} = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0,40 \cdot (-3,4) + 0,60 \cdot 3,6 = 0,80 \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Verificação de K :

$$K_{\text{antes}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (0,40)(25,0) + \frac{1}{2} (0,60)(4,0) = 6,20 \text{ J},$$

$$K_{\text{depois}} = \frac{1}{2} (0,40)(3,4^2) + \frac{1}{2} (0,60)(3,6^2) = 6,20 \text{ J}.$$

Resposta. $v'_1 = -3,4$ m/s, $v'_2 = +3,6$ m/s; conservam-se $P = 0,80$ kg·m/s e $K = 6,20$ J.

Problema AE-A2 — Teorema do impulso

Enunciado. Um corpo de massa $m = 0,50$ kg chega a uma almofada de impacto com velocidade $v_0 = -2,0$ m/s (sinal negativo: para a esquerda). Durante $\Delta t = 12$ ms actua uma força externa com perfil triangular até um pico $F_{\max} = 800$ N e volta a zero. Determina o impulso $\vec{J}$, a força média e a velocidade de saída v_f (assume direcção fixa).

Dados. $m = 0,50$ kg; $v_0 = -2,0$ m/s; $\Delta t = 0,012$ s; $F(t)$ triangular com altura 800 N.

Objetivo. Calcular J , $F_{\text{méd}}$ e v_f .

Estratégia. Para $F(t)$ triangular: $J = \text{área} = \frac{1}{2}F_{\max}\Delta t$. Depois usar $J = \Delta p = m(v_f - v_0)$.

Resolução.

$$J = \frac{1}{2} F_{\max} \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 0,012 = 4,8 \text{ N}\cdot\text{s}.$$

$$F_{\text{méd}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{4,8}{0,012} = 400 \text{ N}.$$

$$m(v_f - v_0) = J \Rightarrow v_f = v_0 + \frac{J}{m} = -2,0 + \frac{4,8}{0,50} = +7,6 \text{ m/s}.$$

Resposta. $J = 4,8 \text{ N}\cdot\text{s}$; $F_{\text{méd}} = 400 \text{ N}$; $v_f = +7,6 \text{ m/s}$.

Problema AE-A3 — Centro de massa (sistema discreto)

Enunciado. Três partículas movem-se num plano. Massas: $m_1 = 2,0$ kg, $m_2 = 1,0$ kg, $m_3 = 1,5$ kg. Posições (em m): $\vec{r}_1 = (0, 0)$, $\vec{r}_2 = (3, 0)$, $\vec{r}_3 = (0, 4)$. Velocidades (em m/s): $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (-1, 0, 0, 5)$. (a) Determina $\vec{r}_{\text{CM}}$ e $\vec{V}_{\text{CM}}$. (b) Ocorre uma explosão interna que altera apenas as velocidades de 1 e 3 por impulsos internos iguais e opostos, de tal modo que $\Delta\vec{p}_1 = (+0,9, -0,6) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ e $\Delta\vec{p}_3 = -(+0,9, -0,6)$. Mostra que $\vec{V}_{\text{CM}}$ não se altera.

Dados. Como acima.

Objetivo. Calcular $\vec{r}_{\text{CM}}$, $\vec{V}_{\text{CM}}$ e demonstrar invariância de $\vec{V}_{\text{CM}}$.

Estratégia. Usar definições:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i, \quad \vec{V}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i, \quad M = \sum m_i.$$

Impulsos *internos* somam zero $\Rightarrow \Delta\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{V}_{\text{CM}}$ invariante.

Resolução. Massa total: $M = 2,0 + 1,0 + 1,5 = 4,5$ kg.

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{4,5} (2,0(0, 0) + 1,0(3, 0) + 1,5(0, 4)) = \left(\frac{3}{4,5}, \frac{6}{4,5} \right) = (0,667, 1,333) \text{ m}.$$

$$\vec{V}_{\text{CM}} = \frac{1}{4,5} (2,0(1, 0) + 1,0(0, 1) + 1,5(-1, 0, 5)) = (0,111, 0,389) \text{ m/s}.$$

Após a explosão: $\Delta\vec{p}_1 = (+0,9, -0,6)$, logo $\Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}_1/m_1 = (+0,45, -0,30) \text{ m/s}$; $\Delta\vec{v}_3 = -\Delta\vec{p}_1/m_3 = (-0,60, +0,40) \text{ m/s}$. Novas velocidades:

$$\vec{v}'_1 = (1,45, -0,30), \quad \vec{v}'_2 = (0, 1), \quad \vec{v}'_3 = (-1,60, 0,90).$$

Novo $\vec{V}_{\text{CM}}$:

$$\vec{V}'_{\text{CM}} = \frac{1}{4,5} (2,0 \vec{v}'_1 + 1,0 \vec{v}'_2 + 1,5 \vec{v}'_3) = (0,111, 0,389) \text{ m/s}.$$

Como esperado, $\vec{V}'_{\text{CM}} = \vec{V}_{\text{CM}}$ (impulsos internos não alteram $\vec{P}$).

Resposta. $\vec{r}_{\text{CM}} = (0,667, 1,333) \text{ m}$; $\vec{V}_{\text{CM}} = (0,111, 0,389) \text{ m/s}$; $\vec{V}_{\text{CM}}$ invariante após a explosão.

Centro de massa (CM) de formas arbitrárias

Notação e conceitos

m massa [kg]; M massa total [kg]; ρ densidade de massa [kg/m³] (3D) ou por área σ [kg/m²] (lâmina 2D).

$\vec{r} = (x, y, z)$ posição [m]; em lâmina: (x, y) ; em volume: (x, y, z) .

A área [m²]; V volume [m³].

Centro de massa (ou *centroide* se ρ uniforme): $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$.

Para lâminas de densidade superficial uniforme σ : $M = \sigma A$ e o CM coincide com o *centroide geométrico*.

Fórmulas gerais (prontas a usar)

Lâmina (2D) com densidade uniforme σ

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} x dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} y dA, \quad A = \iint_{\mathcal{A}} dA.$$

Se $\sigma(x, y)$ não for constante:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint x \sigma(x, y) dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint y \sigma(x, y) dA, \quad M = \iint \sigma(x, y) dA.$$

Volume (3D) com densidade uniforme ρ

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint z dV, \quad V = \iiint dV.$$

Com $\rho(x, y, z)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint x \rho dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint y \rho dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint z \rho dV, \quad M = \iiint \rho dV.$$

Decomposição em partes (discreto ou contínuo) Se a forma for união de n pedaços com áreas A_i , massas m_i e centroides $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Para densidade uniforme: $m_i \propto A_i$ (lâmina) ou $m_i \propto V_i$ (volume).

Centroide de polígono plano simples (fórmula “sapateiro”) Se o contorno é um polígono $\mathcal{P}$ de vértices (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, com $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (x_1, y_1)$:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^N (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \quad \bar{y} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^N (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

(Válida para densidade uniforme e polígono simples; para várias componentes, usar média ponderada pelas áreas.)

Como ensinar “qualquer” CM (ex.: mapa de Portugal)

Sequência didáctica em quatro níveis (do concreto ao abstrato)

- 1) **Método do recorte e equilíbrio (laboratorial).** Imprime o contorno numa cartolina de gramagem uniforme, recorta e encontra o ponto de equilíbrio com uma agulha: esse ponto é o centroide (aproximação física directa).
- 2) **Método da grelha (contagem de células).** Sobre põe uma grelha quadrada (passo h). Marca as células totalmente dentro e as parcialmente dentro com pesos (p.ex., meia-célula). O centroide aproxima-se por média ponderada dos centros de célula:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_j w_j x_j}{\sum_j w_j}, \quad \bar{y} \approx \frac{\sum_j w_j y_j}{\sum_j w_j},$$

onde w_j é a fracção de área da célula j no interior, x_j, y_j o centro da célula.

- 3) **Método do polígono (fórmula fechada).** Digitaliza o contorno (apenas a *linha* exterior) e obtém a lista ordenada de vértices (x_i, y_i) numa projecção planar. Aplica as fórmulas do “sapateiro” para A , $\bar{x}$, $\bar{y}$. Para várias componentes (Continente, Açores, Madeira):

$$\bar{x} = \frac{\sum_k A_k \bar{x}_k}{\sum_k A_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_k A_k \bar{y}_k}{\sum_k A_k}.$$

- 4) **Método de Monte Carlo (estatístico).** Lança N pontos aleatórios numa caixa que contenha a forma; mantém os n pontos que caem *dentro* do contorno e calcula a média das suas coordenadas:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p, \quad \bar{y} \approx \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n y_p.$$

O erro decresce como $\sim 1/\sqrt{n}$; óptimo para turmas com vários grupos a somar amostras.

Notas essenciais para mapas

Projecção. Coordenadas geográficas (lat/long) não são cartesianas. *Projecta* primeiro para um sistema métrico adequado (p.ex., PT-TM06/ETRS89) e só depois aplica as fórmulas de polígono/área.

Componentes múltiplas. Portugal não é conexo: Continente, Madeira, Açores. O CM “de Portugal” (território) é a média ponderada pelas áreas (ou massas, se densidade variar) dos três conjuntos.

O que estás a medir? *Centroide da superfície* (lâmina) difere de *centro de massa real* se a densidade não for uniforme (relevo, geologia). Para ensino secundário, usa densidade uniforme (centroide).

Exemplos de sala (curtos, com resultado final)

Ex. 1 — Decomposição em formas simples (rectângulo + triângulo). Se a figura é um rectângulo de base b e altura h com um triângulo isósceles no topo (base b , altura h_t):

$$A_1 = bh, \quad (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); \quad A_2 = \frac{1}{2}bh_t, \quad (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{b}{2}, h + \frac{h_t}{3}\right).$$

$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2}{A_1 + A_2} = \frac{b}{2}, \quad \bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2}{A_1 + A_2}.$$

Ex. 2 — Polígono qualquer (fórmula fechada). Para vértices (m) $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 2)$, $(2, 3)$, $(0, 2)$:

$$A = \frac{1}{2}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - (0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0)) = 9 \text{ m}^2.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6A} \sum (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{54}((0+4) \cdot 0 + (4+5) \cdot 8 + (5+2) \cdot 9 + (2+0) \cdot 4 + (0+0) \cdot 0) = \frac{(0+72+63+8+0)}{54}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6A} \sum (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{54}((0+0) \cdot 0 + (0+2) \cdot 8 + (2+3) \cdot 9 + (3+2) \cdot 4 + (2+0) \cdot 0) = \frac{(0+16+45+20+0)}{54}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (2,78, 1,57) \text{ m.}$$

Ex. 3 — Monte Carlo (esboço). Geram-se $N = 10^4$ pontos uniformes numa caixa $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$; testam-se “interior vs exterior” ao contorno (teste do número de cruzamentos). Com $n \approx 3,1 \times 10^3$ pontos dentro, obtém-se, por exemplo,

$$\bar{x} \approx 2,80 \text{ m}, \quad \bar{y} \approx 1,55 \text{ m} \quad (\text{incerteza estatística} \sim 0,02 \text{ m}).$$

Para o caso “Portugal” — guia operacional

- Escolhe uma projecção métrica (p. ex., PT-TM06/ETRS89). Trabalhar em lat/long não é adequado.
- Obtém o contorno poligonal do Continente e de cada arquipélago (um polígono por ilha ou por conjunto).
- Calcula $(A_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k)$ de cada componente com a fórmula do polígono.
- Combina por média ponderada de áreas:

$$\bar{x}_{\text{PT}} = \frac{\sum_k A_k \bar{x}_k}{\sum_k A_k}, \quad \bar{y}_{\text{PT}} = \frac{\sum_k A_k \bar{y}_k}{\sum_k A_k}.$$

- Extensão (opcional):* centro de massa “populacional” (troca-se área por população P_k ou por densidade $\sigma(x, y)$ se houver mapa raster).

Erros típicos a evitar (para os alunos)

Ordenação dos vértices do polígono: usar sentido consistente (horário ou anti-horário) e fechar o polígono $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (x_1, y_1)$.

Misturar graus com metros: *projectar primeiro* para coordenadas cartesianas.

Esquecer componentes múltiplas (ilhas) ou ponderações correctas.

Problema AE-A4/AE-A5 — Trabalho e energia mecânica

Enunciado. Um bloco de massa $m = 1,20$ kg desce, sem atrito, um plano inclinado desde uma altura vertical $h = 1,50$ m e comprime uma mola de constante $k = 800$ N/m colocada no fim do plano. (a) Determina a compressão máxima $x_{\max}$. (b) Determina a rapidez v do bloco imediatamente antes de tocar a mola.

Dados. $m = 1,20$ kg; $h = 1,50$ m; $k = 800$ N/m; sem atrito; $g = 9,81$ m/s².

Objetivo. Calcular $x_{\max}$ e v .

Estratégia. (a) Conservação de energia mecânica: $mgh = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$. (b) Entre o topo e a base (antes da mola): $mgh = \frac{1}{2}mv^2$.

Resolução. (a)

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,20 \cdot 9,81 \cdot 1,50}{800}} = 0,210 \text{ m.}$$

(b)

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,50} = 5,425 \text{ m/s.}$$

Resposta. $x_{\max} = 0,210$ m; $v = 5,425$ m/s (antes de tocar a mola).

Problema AE-A6 — Forças dissipativas (atrito cinético)

Enunciado. Um bloco de massa $m = 2,0$ kg desliza numa superfície horizontal com atrito cinético de coeficiente $\mu_k = 0,25$. À passagem pelo ponto $x = 0$ a sua rapidez é $v_0 = 6,0$ m/s. (a) Determina a aceleração constante durante a travagem. (b) Determina o tempo até parar. (c) Determina a distância de paragem. (d) Determina a potência dissipada no instante inicial.

Dados. $m = 2,0$ kg; $\mu_k = 0,25$; $v_0 = 6,0$ m/s; $g = 9,81$ m/s².

Objetivo. Calcular a , t_{par} , s e $\mathcal{P}(t = 0)$.

Estratégia. Atrito cinético: $\vec{f}_k = -\mu_k N \hat{t}$, com $N = mg$ em horizontal. Força resultante $\Rightarrow$ aceleração constante $a = -\mu_k g$. Cinemática com a constante. Potência instantânea $\mathcal{P} = |\vec{f}_k| v = \mu_k mg v$.

Resolução.

$$a = -\mu_k g = -0,25 \cdot 9,81 = -2,4525 \text{ m/s}^2.$$

$$t_{\text{par}} = \frac{v_0}{\mu_k g} = \frac{6,0}{0,25 \cdot 9,81} = 2,446 \text{ s.}$$

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} = \frac{6,0^2}{2 \cdot 0,25 \cdot 9,81} = 7,339 \text{ m.}$$

$$\mathcal{P}(0) = \mu_k m g v_0 = 0,25 \cdot 2,0 \cdot 9,81 \cdot 6,0 = 29,43 \text{ W.}$$

Resposta. $a = -2,4525 \text{ m/s}^2$; $t_{\text{par}} = 2,446 \text{ s}$; $s = 7,339 \text{ m}$; $\mathcal{P}(0) = 29,43 \text{ W}$.